

# ALCUNI CENNI SULLE TECNICHE NUMERICHE NON TRADIZIONALI NELLA PROGETTAZIONE GEOTECNICA

Dr. Ing. Angelo Silvio Rabuffetti – Milano  
www.terrain.it

## SOMMARIO

Le moderne impostazioni, anche normative, delle problematiche ingegneristiche, sollecitano un graduale passaggio dai consolidati approcci basati su modellazioni semplificate a metodi più globali in grado di risolvere contemporaneamente scenari di stabilità (stati limite ultimi) e di spostamenti o cedimenti (stati limite di esercizio). Il campo di applicazione dei metodi numerici agli Elementi Finiti e alle Differenze Finite si è molto sviluppato negli ultime decenni e numerose soluzioni si adattano bene alla complessità dell'interazione tra strutture e terreni. Nel loro insieme, queste soluzioni rifuggono dalle approssimazioni tipiche dei metodi tradizionali, in quanto i limiti di precisione sono dettati dai meri progressi del calcolo scientifico, e non da assunzioni geotecniche semplificative più o meno aprioristiche.

Senza pretesa di completezza, questa memoria descrive alcune caratteristiche dei metodi FEM e FDM affinché sia meglio compresa la portata delle soluzioni offerte, praticamente a parità di impegno di risorse progettuali, rispetto ai metodi tradizionali.

Parole chiave: elementi finiti, FEM, differenze finite, FDM

## 1 – DIFFERENZE TRA APPROCCI

L'evoluzione della pratica ingegneristica è uno degli anelli della catena nel costante avanzamento tecnologico. In geotecnica, ogni giorno importanti innovazioni si susseguono nella pratica progettuale e nei controlli strumentali in campo. La Normativa tecnica, in sintonia con le politiche europee, impone le verifiche di stati limite ultimi e stati limite di esercizio, che impegnano risorse progettuali maggiori che in precedenza e comunque sottoposte a processi di costante affinamento.

Determinare il *comportamento complessivo* di una struttura geotecnica, sia in fase di realizzazione sia in fase di esercizio, è una prescrizione ormai corrente nei dettati normativi (Rabuffetti, 2010). Le modalità di verifica tradizionali, che fanno capo ad algoritmi più o meno semplificati basati sull'equilibrio limite, si rivelano sovente insufficienti a descrivere il comportamento delle strutture, o *interazione terreno-struttura*, non appena il problema in esame superi una certa soglia, non eccessivamente elevata, di complessità. Ciò è ancora più vero quando si tratta di materiali a comportamento non lineare, come quello

esibito dai terreni già a modestissimo livello di sollecitazione.

A volte, il grado di precisione delle soluzioni numeriche più evolute sembrerebbe non giustificare l'abbandono di tecniche ben consolidate e patrimonio di un grande numero di operatori. Si tratta, in realtà, di un falso problema, perché al contrario, le tecniche numeriche agli elementi finiti (FEM) o alle differenze finite (FDM), a parità di precisione (o imprecisione...), offrono consistenti vantaggi accessori (Griffiths e Lane, 1999). Innanzitutto, si tratta sempre di soluzioni meno *approssimate*, in quanto i limiti di precisione sono dettati dai progressi attuali del calcolo scientifico, e non da assunzioni geotecniche semplificative più o meno "a priori". In più, gli algoritmi FEM e FDM per la geotecnica forniscono sempre una stima degli spostamenti (cedimenti) attesi, eventualmente in funzione del decorso dei processi consolidativi. Oltre, naturalmente, al fatto che per sua natura il tipo di approccio è costantemente soggetto a ricerca e a contribuzioni aperte e innovative, cosa che non si può certo dire per i sistemi consolidati dell'equilibrio limite.

Un esempio di paragone tra metodi “tradizionali” e metodi numerici “avanzati” è costituito dall’analisi di stabilità del pendio, considerando per questo le soluzioni all’equilibrio limite su superfici circolari (Bishop, 1955) e una soluzione FEM disaccoppiata basata sul criterio di Morh-Coulomb (Smith e Griffiths, 1982).

Nel primo caso, come noto, il problema è algebricamente indeterminato, tanto che per risolverlo occorre introdurre delle semplificazioni geotecniche. Considerando la nota soluzione mostrata in Fig. 1.1, la suddivisione in conci che sta alla base degli algoritmi genera un numero di equazioni di equilibrio che è inferiore alle incognite compressive di sistema. Infatti, detto  $n$  il numero di conci elementari, la risultante  $N_i$  pertinente a ciascun concio, l’angolo  $\alpha_i$  di applicazione, il raggio “locale”  $r_{\alpha}$  e il fattore di sicurezza puntuale  $F_{Si}$  costituiscono un insieme di  $4 \cdot n$  incognite. Le relazioni di equilibrio alla traslazione orizzontale, verticale e alla rotazione forniscono un sistema di  $3 \cdot n$  equazioni, insufficiente a risolvere il problema. Sono dunque necessarie alcune semplificazioni geotecniche di partenza (raggio  $R$  costante, assunzioni circa le forze agenti tra conci adiacenti, ecc.).

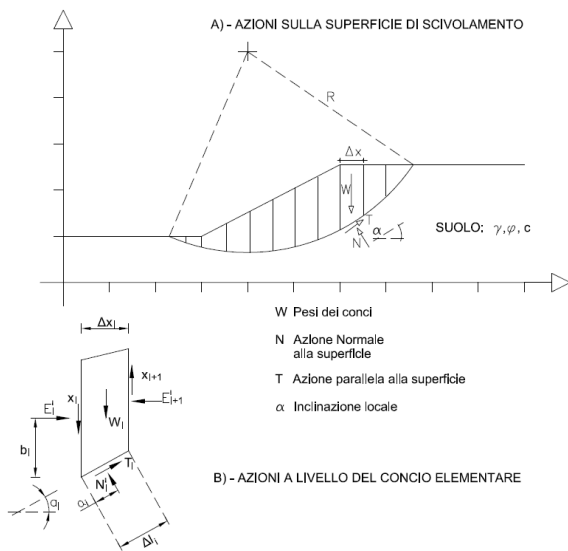


Fig. 1.1–Metodo “circolare” per l’analisi di un pendio

Al contrario, le tecniche FEM non implicano semplificazioni geotecniche, mentre forniscono una soluzione in termini di spostamenti del pendio non contemplata nei metodi tradizionali, la cui precisione dipende unicamente dalla qualità dei dati in entrata. In altri termini, l’approccio numerico è più complesso ma anche più razionale.

## LE TECNICHE DI CALCOLO

### 2.1 – Algoritmi agli elementi finiti

Il Metodo agli Elementi Finiti (F.E.M.) è una tecnica numerica di risoluzione di equazioni differenziali parziali che consiste nel discretizzare queste equazioni

nelle loro dimensioni spaziali. La definizione è molto ampia e comprende sistemi fisici monodimensionali, bi- e tridimensionali, sistemi meccanici, idraulici, di conduzione di elettricità e di calore, campi magnetici, gravitazionali e altri. L’aspetto più significativo del metodo è la possibilità di ridurre formidabili problemi differenziali, anche non lineari, alla risoluzione di un sistema algebrico di equazioni di primo grado a varie incognite, sistema eventualmente esteso ma di tipo lineare.

L’analisi strutturale e quella geotecnica rientrano in genere nei sistemi F.E. meccanici, con *accoppiamento*, nel caso della consolidazione, a un sistema idraulico la cui analisi è condotta nel dominio del tempo. L’analisi di filtrazione delle falde rientra invece nei sistemi F.E. idraulici.

Il motivo per cui inizialmente si presenta un sistema di equazioni differenziali risiede nei tipici legami che si vogliono risolvere (si considerino per i solidi i legami sforzi/deformazioni, o nei mezzi porosi i moti di filtrazione come problema idraulico) che coinvolgono relazioni differenziali sia del primo ordine, sia di ordine superiore.

Attraverso l’analisi algebrica lineare, si modellano degli insiemi complessi suddividendoli in singoli campi di integrazione di dimensione limitata – gli elementi finiti –, ciascuno di caratteristiche note, interconnessi agli altri unicamente attraverso i nodi posti sul contorno, più o meno facilmente modellabili dal punto di vista fisico.

La tecnica FEM consiste in sintesi nei seguenti passi:

1) - definizione di alcune relazioni specifiche e peculiari che legano il comportamento degli elementi, punto per punto al proprio interno, con quello che accade ai nodi (funzioni di forma). Note le sollecitazioni o le deformazioni ai nodi, le funzioni di forma permettono di calcolare, punto per punto, le stesse grandezze all’interno dell’elemento (In Fig. 2.1.1 è mostrata come esempio la funzione scala cromatica all’interno di un elemento, derivata tramite le funzioni di forma una volta noti i valori della funzione cromatica stessa in corrispondenza dei nodi al contorno)

2) - costruzione di determinate relazioni numeriche che “condensano” ai nodi le caratteristiche meccaniche di tutti i punti all’interno dei singoli elementi finiti (in meccanica, le matrici delle rigidezze dei singoli elementi). Tali relazioni, fondamentalmente di tipo *lineare*, rappresentano i legami sforzi/deformazioni che implementano i processi di derivazione parziali

3) - costruzione di un sistema algebrico *lineare* risolvibile in cui sono assemblate tutte le matrici delle rigidezze degli elementi finiti, insieme ai termini noti dati dalle forze esterne. Il sistema modella per intero il problema e soddisfa le condizioni di equilibrio di tutti i nodi del sistema. In termini di modellazione numerica, il sistema contiene le caratteristiche proprie di tutti gli elementi finiti insieme a tutte le condizioni/azioni esterne agenti sul sistema (ad es. la gravità o i carichi impressi, le pressioni neutre al contorno, dati noti a priori)

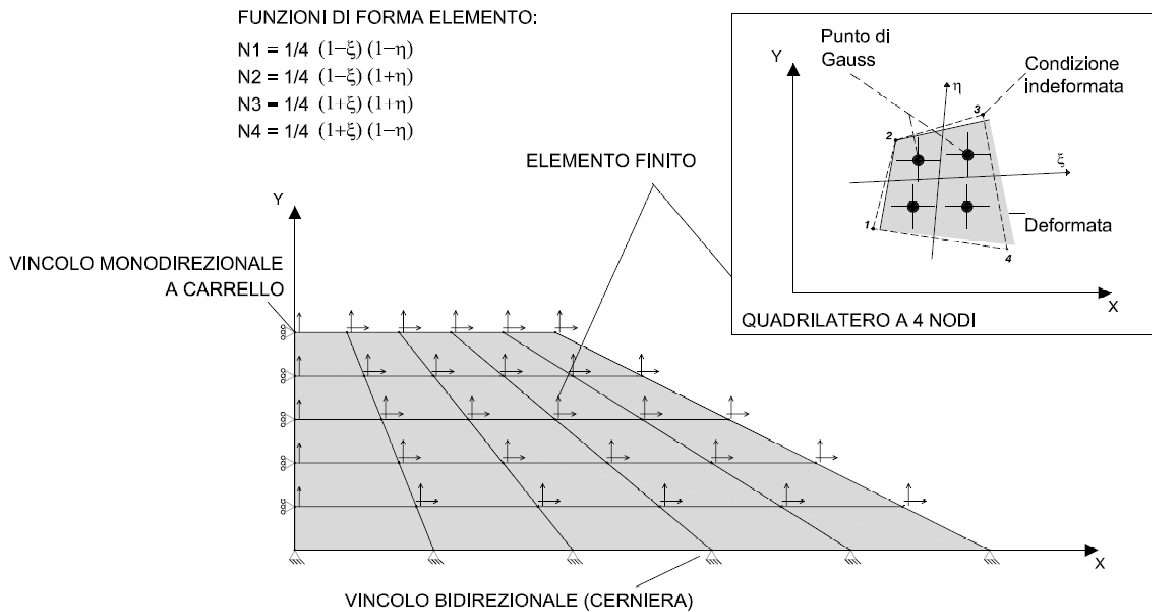


Fig. 2.1.2 – Esempio di maglia bidimensionale agli elementi finiti

4) - risoluzione del sistema, determinando dapprima il quadro degli spostamenti e delle deformazioni (e/o delle pressioni neutre) mediante il calcolo e successivamente lo stato tensionale che accompagna queste grandezze

5) - adattamento delle soluzioni ai sistemi più eterogenei, che esibiscono fenomeni di plasticità già a basso livello tensionale (caso tipico dei terreni), ovvero che mostrano caratteristiche di comportamento ulteriori (si pensi all'evoluzione nel dominio del tempo dei fenomeni della consolidazione).

I punti rappresentativi nei quali vengono verificate le caratteristiche di resistenza a taglio del terreno, mediante opportune funzioni, sono i punti di Gauss, in numero di 4 per elementi piani quadrilateri (8 per elementi poliedri a 6 facce o "brick", ecc.), mostrati in Fig. 2.1.2. Nella stessa figura sono riportate le funzioni di forma e gli elementi di una mesh a 4 nodi rappresentante un pendio, con relativi gradi di libertà di ciascun nodo.

Il metodo FEM è una tecnica numerica complessa, maturata di pari passo con l'evoluzione della potenza di calcolo degli elaboratori elettronici. Zienkiewicz e Taylor (1991), Smith e Griffiths (1988), descrivono compiutamente la costruzione delle funzioni di forma, l'assemblaggio delle matrici delle rigidezze e dei sistemi risolvibili, generalizzati per un vario spettro di problemi. Nel campo delle fondazioni, Bowles (1997) approfondisce l'analisi di elementi strutturali monodimensionali (travi rovesce, pali, paratie) e bidimensionali (fondazioni a platea) che interagiscono con il terreno. Sempre in geotecnica, Griffith e Lane (1999) sintetizzano alcuni aspetti del metodo FEM con riferimento all'analisi dei pendii.

Tornando al paragone iniziale con i metodi tradizionali, in Fig. 2.1.3 è mostrato un tipico esempio bidimensionale di griglia per la stabilità del pendio, composta da 350 elementi finiti piani quadrilateri, dotati di 8 nodi ciascuno, per un totale di 1141 nodi.

Ogni nodo, quando si tratta di materiali terrosi insaturi, possiede due sole libertà (traslazione orizzontale e

traslazione verticale), quindi il numero totale di libertà del sistema è pari a 2284. Alcune equazioni però rappresentano dei vincoli esterni e sono identità nulle, che vanno eliminate, così che rimangono solo le libertà non azzerate da tali nodi a terra (in totale 42 cerniere e 59 carrelli verticali, per un numero di 143 libertà eliminate). Le libertà che vengono associate ciascuna ad un'incognita del sistema risolvibile sono perciò  $1141 * 2 - 143 = 2139$ , che è il numero di equazioni da risolvere.

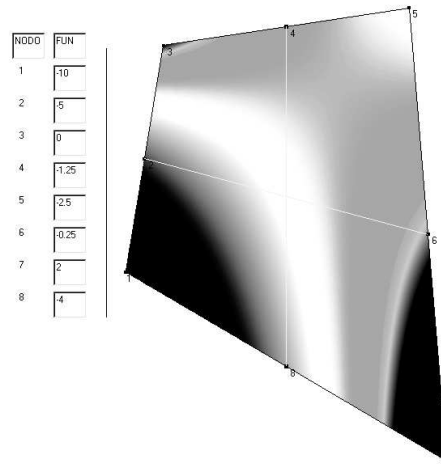


Fig. 2.1.1. – Variabilità di una funzione colore utilizzando delle funzioni di forma

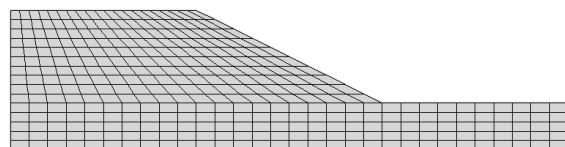


Fig. 2.1.3 – Maglia FEM bidimensionale

Le caratteristiche elastiche del suolo (modulo  $E_s$  e coefficiente di Poisson  $\nu$ ) permettono di implementare le

matrici delle rigidezze degli elementi. Le caratteristiche di resistenza al taglio ( $c$ ,  $\phi$  e la dilatanza  $\psi$ ) definiscono e governano la rottura del terreno quando vengono superate certe soglie nelle relazioni sforzi / deformazioni. Alla fine del calcolo che si è impostato, ciascuna radice di equazione rappresenta uno spostamento, orizzontale o verticale, da combinare nell'insieme. Un tipico algoritmo viscoplastico FEM applicato al problema di in esame genera, in termini di spostamenti, il risultato mostrato in FIG. 2.1.4).

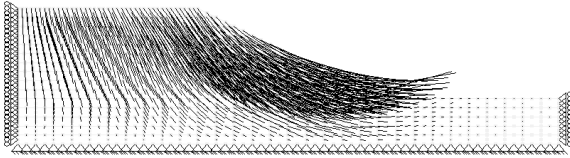


Fig. 2.1.4 – Spostamenti calcolati

Il tipo di operazioni che svolge un programma FEM è ripetitivo. Considerando inizialmente un problema di elasticità lineare, in forma sintetica matriciale il sistema di equazioni di primo grado risolvibile è il seguente:

$$\mathbf{K} * \mathbf{r} = \mathbf{F} \quad (1)$$

La matrice  $\mathbf{K}$  raccoglie le rigidezze dell'intero sistema,  $\mathbf{r}$  è il vettore degli spostamenti generalizzati nelle direzioni  $x$  e  $y$ ,  $\mathbf{F}$  il vettore delle forze esterne applicate. Il plottaggio dei valori contenuti nel vettore  $\mathbf{r}$  come in Fig. 2.1.4, riferiti ciascuno al nodo di pertinenza del pendio iniziale, è il primo risultato pratico del calcolo. Per il momento, non si approfondisce il fatto che per ottenere gli spostamenti finali si faccia già uso della viscoplasticità (comportamento non lineare). A questo punto, sulla base delle relazioni sforzi/deformazioni già introdotte, si definiscono i campi tensionali generati nel terreno. La resistenza a taglio viene anch'essa implementata mediante leggi costitutive coerenti con il modello fisico FEM. Senza entrare nei dettagli dell'analisi numerica, la legge di Mohr-Coulomb viene formulata come segue in termini di stress principali  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ :

$$(\sigma_1 + \sigma_3)/2 \sin \phi - (\sigma_1 - \sigma_3)/2 - c \cos \phi = 0 \quad (2)$$

Essa si traduce in una funzione di collasso  $F$  che viene verificata in particolari punti rappresentativi di ciascun elemento. La forma della funzione di collasso, che si avvale degli invarianti di stress  $\sigma_m$  e  $\underline{\sigma}$ , numericamente meglio manipolabili rispetto a  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ , è la seguente:

$$F = \sigma_m \sin \phi + \underline{\sigma} (\cos \theta / \sqrt{3} - \sin \theta \sin \phi / 3) - c \cos \phi \quad (3)$$

I punti rappresentativi nei quali viene verificata la funzione sono i punti di Gauss (Fig. 2.1.2), ricavabili secondo il principio di quadratura di Gauss-Legendre.

La rappresentazione della funzione di collasso relativa al criterio di Mohr-Coulomb (3), proiettata nel piano tensoriale ( $\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3$ ) dà un'idea del tipo di approccio (Fig. 2.1.5).

Disegnata la piramide rovescia che rappresenta la  $F$  ( $\sigma_1, \sigma_3$ ) ovvero  $F(\sigma_m, \underline{\sigma})$ , i punti sottoposti a tensione che

ricadono all'interno della stessa figura (campo di esistenza per  $F < 0$ ) sono "stabili", quelli all'esterno sono "collassati" ( $F > 0$ ).

Il risvolto di tale analisi è ovvio: oltre un certo limite, il terreno non resiste più e crolla a taglio, formando *superfici di scivolamento* che si attivano senza ulteriori aggravamenti a carico del terreno "rotto" circostante.

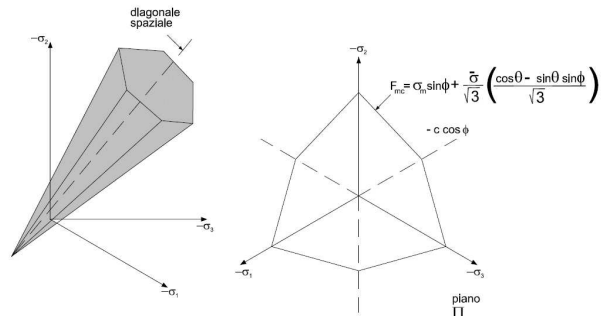


Fig. 2.1.5 – Criterio di collasso di Mohr-Coulomb

Come discusso più avanti, nella modellazione geotecnica si tiene conto dei limiti costituiti dalla resistenza del terreno introducendo la teoria della plasticità. In sostanza, la legge costitutiva del terreno (3) viene sostituita, al di fuori del proprio campo di esistenza, da una funzione analoga, *il potenziale di plasticizzazione*.

La flessibilità dei modelli FEM, comunque, è tale da permettere una grande varietà di approcci. Sempre in merito alle problematiche per le quali vengono utilizzati, basta pensare alla facilità con cui si possono sostituire le incognite "spostamenti" alle incognite "permeabilità" nello stesso sistema risolvibile (1).

Nelle Fig. 2.1.6 e in Fig. 2.1.7 (da Smith-Griffiths, 2004) viene mostrata la soluzione idraulica di un reticolo di flusso all'interno del corpo di una diga in terra. In questo caso le equazioni che reggono il sistema utilizzano le leggi di flusso dei liquidi incompressibili nei mezzi porosi (equazioni di Navier-Stokes, vedere anche Schlichting, 1960). In questo caso il sistema lineare (1) contiene le caratteristiche di permeabilità in luogo delle matrici delle rigidezze, e le incognite sono le cadute di pressione idraulica. Non si entra nel dettaglio del problema, limitando l'attenzione alle potenzialità enormi dell'approccio.

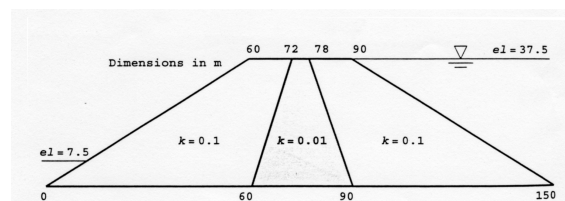


Fig. 2.1.6 – Il problema della filtrazione in una diga in terra

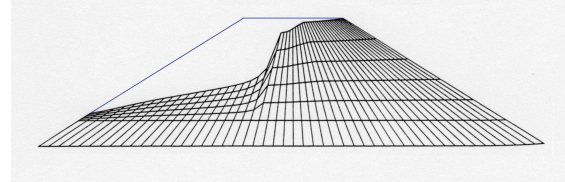


Fig. 2.1.7 – Superficie idraulica libera calcolata

Si consideri infine che il metodo di calcolo basato sul sistema risolvete (1) può essere utilizzato anche per elementi finiti mono dimensionali, come gli elementi trave (*beam*). Nella tecnica delle fondazioni, si risolvono sistemi tipicamente concepiti come strutture che interagiscono con il terreno (Fig. 2.1.8).

I modelli fisici sono simili a quelli alle differenze finite nel dominio dello spazio (FDM). Le strutture e i terreni vengono modellati in termini di caratteristiche geometriche (sezione, inerzia delle strutture), elastiche (modulo elastico e/o costanti di molla), caratteristiche di resistenza.

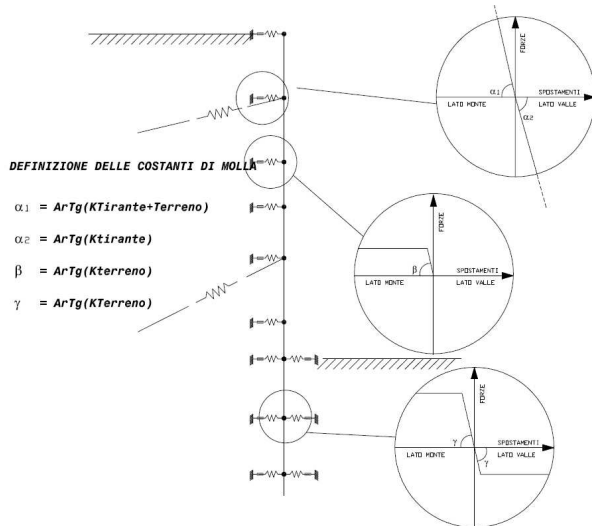


Fig. 2.1.8 – Soluzione FEM di un diaframma

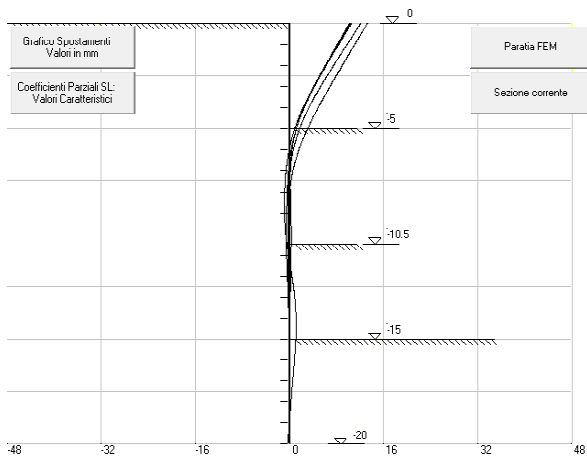


Fig. 2.1.9 – Spostamenti durante gli scavi

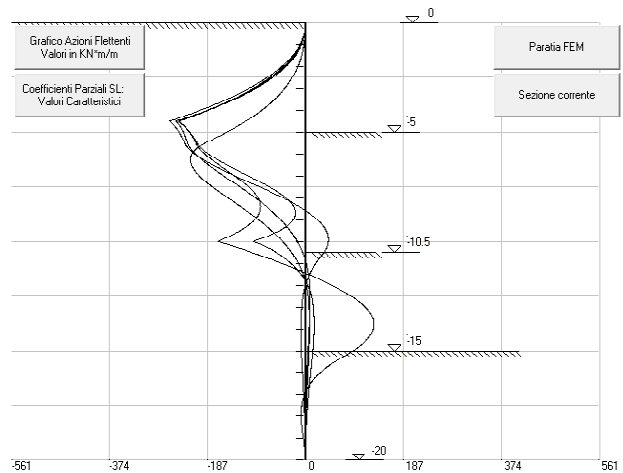


Fig. 2.1.10 – Azioni interne della struttura –  $M_f$

Come nei casi FDM, si risolvono travi su suolo elastico, pali, paratie. La soluzione FEM presuppone la discretizzazione in un numero adeguato di conci elementari, a ciascuno dei quali nel sistema (1) si associa una matrice delle rigidezze.

Senza entrare nei dettagli dell'analisi algebrica, si nota che il sistema contiene ogni informazione necessaria riguardo al comportamento del terreno (caratteristiche delle "mollette" costituite da terreno, resistenza al taglio, ecc.) e alle spinte esercitate dal terreno. La risoluzione del problema della paratia, ad esempio, integra un profilo di spostamenti orizzontali durante gli scavi (Fig. 2.1.9), dal quale si ricavano, mediante i noti legami sforzi-deformazioni, le azioni interne (taglio, momento flettente) necessarie per il progetto strutturale (Fig. 2.1.10).

## 2.2 - Le differenze finite nel dominio dello spazio.

Alcuni problemi di interazione suolo-struttura sono risolti con i metodi alle differenze finite (FDM), algoritmi che costituiscono una valida alternativa in termini di velocità di calcolo rispetto ai sistemi agli elementi finiti monodimensionali e bidimensionali.

Anche in questo caso si tratta una riduzione ad un sistema di equazioni lineari (equazioni alle differenze) di un problema governato da equazioni differenziali di ordine superiore al primo.

Tipiche applicazioni alle differenze finite sono la risoluzione di travi e platee impostate su terreni alla Winkler (Bowles, 1974, 1997), ma soprattutto la risoluzione dei pali caricati sia verticalmente che lateralmente (Kraft, 1981 - Reese, 1986).

Il metodo generale è una tecnica di approssimazione che consiste nel sostituire direttamente ai differenziali algebrici una serie di intervalli geometrici discreti, sostituendo i termini algebrici contenenti dei limiti mediante altri contenenti delle quantità piccole ma misurabili. In termini analitici, utilizzando la notazione di Bowles (1974), si procede alle seguenti sostituzioni:

$$dy \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \text{ con } \Delta y = \text{un valore finito} \quad (2.2.1.a)$$

$$dx \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \text{ con } \Delta x = \text{un valore finito} \quad (2.2.1.b)$$

Le equazioni differenziali che reggono l'analisi strutturale vengono "decostruite" tenendo conto del tipo di problema specifico e risolte di conseguenza. Per esempio, per una semplice trave divisa in una serie di conci uguali, si possono scrivere le relazioni differenziali della meccanica dei materiali:

$$- \text{equaz. differenziale spostamenti/carichi} \quad (2.2.2.a)$$

$$EJ_y \quad d^4y/dx^4 = -q$$

$$- \text{spostamenti/azioni di taglio} \quad (2.2.2.b)$$

$$EJ_y \quad d^3y/dx^3 = -qx + qL/2$$

$$- \text{spostamenti/azioni flettenti} \quad (2.2.2.c)$$

$$EJ_y \quad d^2y/dx^2 = -qx^2/2 + qLx/2$$

$$- \text{spostamenti/rotazioni} \quad (2.2.2.d)$$

$$EJ_y \quad dy/dx = -qx^3/6 + qLx^2/4 - qL^3/24$$

$$- \text{spostamenti/cedimenti in direzione di } q \quad (2.2.2.e)$$

$$EJ_y \quad y = -qx^4/24 + qLx^3/12 - qL^3x/24$$

Nell'esempio di Fig. 2.2.1, la sostituzione tra differenziali e quantità finite (2.2.2.e) si svolge in corrispondenza del nodo nr. 3 come segue:

- a sinistra del nodo

$$dy/dx \approx \Delta y/\Delta x = (y_3 - y_2)/2h$$

- a destra del nodo

$$dy/dx \approx \Delta y/\Delta x = (y_4 - y_3)/2h$$

- a cavallo del nodo, per sommatoria

$$2\Delta y/\Delta x = y_4/h - y_3/h + y_3/h - y_2/h$$

$$dy/dx \approx \Delta y/\Delta x = (y_4 - y_2)/2h$$

$$\text{e in definitiva} \quad (2.2.3e)$$

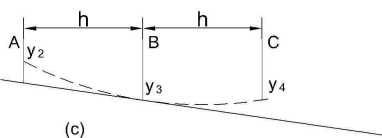
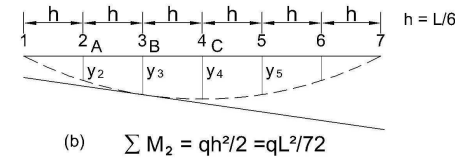
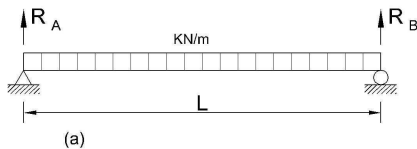
$$EJ_y \Delta y/\Delta x = (y_4 - y_2)/2h(-qx^4/24 + qLx^3/12 - qL^3x/24)$$

Prefissato x, pari in figura a 2h, la (2.2.3.e) è una tipica equazione lineare in y risolvibile del sistema FDM.

Analogamente, si "decostruiscono" tutte le (2.2.3).

Il procedimento può essere trasferito ad una piastra,

Fig. 2.2.1 – Modello alle differenze finite applicato a un elemento beam



considerando la posizione di ciascun nodo della maglia rispetto ai nodi circostanti.

La griglia dei coefficienti di influenza che derivano per una platea di fondazione è mostrata in Fig. 2.2.2 (da

Bowles, 1974), dove vengono distinte le posizioni d'angolo, di bordo e centrali della piastra.

Il modello fisico FDM è simile alla corrispondente soluzione F.E.M, mentre differisce l'algoritmo risolutore. Come per la trave di Fig. 2.2.1, per la piastra di Fig. 2.2.2, la differenza consiste nel fatto che l'analisi FEM risolve le matrici delle rigidezze, mentre l'analisi FDM riduce i differenziali in quantità finite a partire dall'equazione di Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959):

$$\partial^4 w/\partial x^4 + 2\partial^4 w/(\partial x^2 \partial y^2) + \partial^4 w/\partial y^4 = q/D + P/(D\partial x \partial y)$$

In Fig. 2.2.3 è rappresentato il caso particolarmente interessante della piastra su appoggio alla Winkler, schematizzazione valida sia per i metodi FEM che per quelli FDM. La formulazione del problema consiste nell'introdurre una molla in corrispondenza degli appoggi a terra della struttura, lavorando su sistemi risolvibili lineari.

Tali molle devono essere monolaterali, ovvero rispondere con una forza in presenza di un cedimento verso il basso, ma non quando il nodo trasla eventualmente verso l'alto.

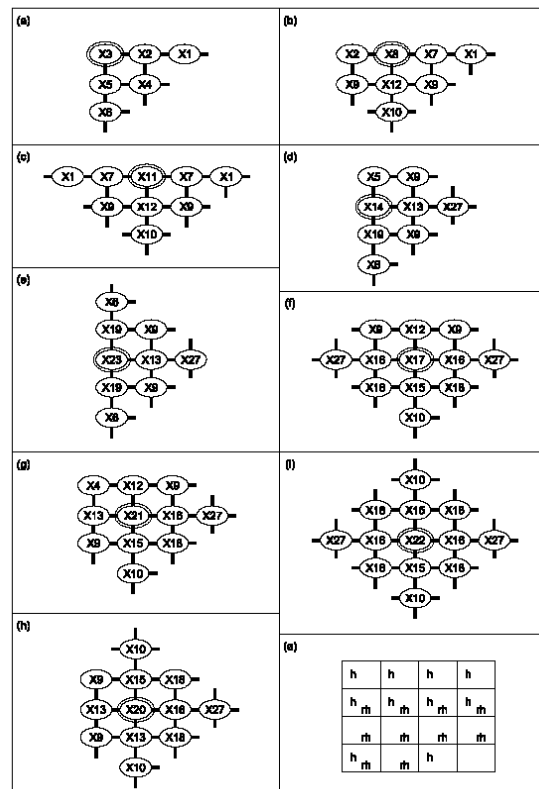


Fig. 2.2.2 – Mutua influenza tra nodi di una piastra nell'analisi FDM

Si tratta di un concetto basilare importante, per la verità non sempre rispettato nelle implementazioni di molti diffusi codici di calcolo strutturale.

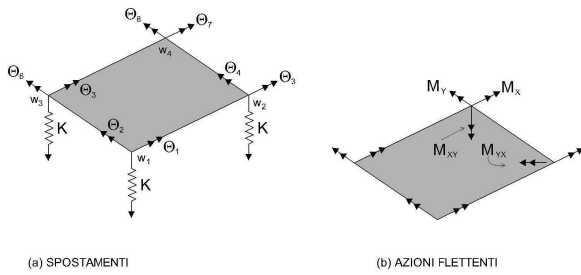


Fig. 2.2.3 – Piastra su suolo elastico – FDM/FEM

La molla del terreno, con la sua costante  $K$ , risponde all'enunciazione della legge di Hook scritta nella forma:

$$k_s = q/\delta \quad [F/L^3] \quad (2.2.3)$$

dove  $k_s$  è il coefficiente di reazione di sottofondo riferito all'unità di superficie,  $q$  è la pressione esercitata sul suolo e  $\delta$  è il cedimento risultante dall'applicazione del carico. A titolo di esempio, nella 2.2.2a) si può introdurre una molla di costante  $k_s$  scrivendo:

$$EJ_y \quad d^4y/dx^4 = -q + k_s y \quad (2.2.2f)$$

Il valore di  $k_s$ , per travi appoggiate su suolo alla Winkler, si ricava mediante prove di carico su piastra o con formule semiempiriche (Bowles, 1997, Habibaghahi e Langer, 1984).

Alcuni valori di  $k_s$ , tipici per travi modellabili come aste lineari appoggiate, sono riferiti nella seguente Tab. 2.2.1. Nell'economia del calcolo FEM o FDM la precisione della determinazione esatta di  $k_s$  non è critica: tenuto conto della variabilità naturale dei terreni e comunque della scarsa sensibilità rispetto alla determinazione delle azioni interne, risulta fondamentale in pratica l'ordine di grandezza.

Per le platee, invece, la determinazione di  $k_s$  non può prescindere dalle dimensioni e dalle caratteristiche di rigidità della platea stessa

Il problema di interazione suolo-struttura è stato affrontato da Vesic (1961) che ha formulato la seguente proposta per la determinazione del coefficiente di Winkler:

$$k_s = 0.65/B [(E_s B^4)/(E_f I_f)]^{1/12} E_s / (1-\mu^2) \quad (2.2.4)$$

dove  $E_s$  e  $\mu$  sono il modulo di Young e il coefficiente di Poisson del suolo, mentre  $B$ ,  $E_f$  e  $I_f$  sono rispettivamente la larghezza, il modulo di Young e il momento d'inerzia della sezione della platea.

TAB. 2.2.1 - Ordine di grandezza per valori di $k_s$ . In argille si fa riferimento alla sollecitazione limite $q_0$ .		
Suolo tipo	Valore di $k_s$ (KN/m <sup>3</sup> )	
	min	Max
Sabbie sciolte	4 800	16 000
Sabbie mediam. addensate	9 600	80 000
Sabbie dense	64 000	128 000
Sabbie medio dense argillose	32 000	80 000
Sabbie medio dense limose	24 000	48 000
Terreni argillosi:		
- $q_0/3 < 200$ KPa	12 000	24 000
- $200 < q_0/3 < 800$ KPa	24 000	48 000
- $q_0/3 > 800$ KPa		> 48 000

La corretta applicazione della 2.2.4) di solito assicura anche un buon accordo tra i valori dei cedimenti calcolati con i metodi geotecnici e quelli ricavati dall'uso di codici di calcolo strutturale FEM.

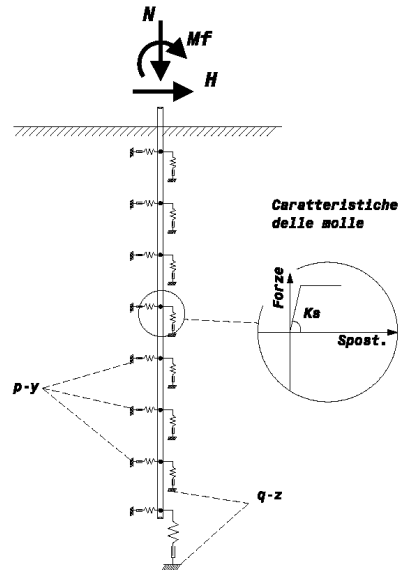


Fig. 2.2.4 Palo con molle elastoplastiche – FDM/FEM

Un'altra applicazione molto usuale che si avvale di algoritmi alle differenze finite riguarda la risoluzione dei pali caricati con azioni verticali, laterali e flettenti.

Il modello strutturale è mostrato in Fig. 2.2.4, dove per il terreno sono evidenziate molle bilineari elastoplastiche.

Lo schema è nuovamente comune per le analisi FEM e FDM. La soluzione del problema consiste nello studio dell'interazione palo-terreno, ovvero nella definizione degli spostamenti e delle azioni interne della struttura del palo sottoposta ad azioni esterne  $N$ ,  $M_f$  e  $H$ .

Le equazioni FDM 2.2.2a)-e) modellano il fusto verticale del palo tenendo conto delle reazioni di molla del terreno ai nodi (eq. (2.2.2f)). Tali reazioni sono modellate come molle elastoplastiche, ovvero governate da una relazione che nella realtà risponde sempre alla (2.2.3), anche se non è più necessariamente una relazione lineare.

In alcuni problemi monodimensionali, la maggiore flessibilità dei sistemi FDM permette di svolgere analisi più accurate utilizzando leggi di risposta non elastica anche molto complesse.

La non linearità tra  $q$  e  $\delta$  viene governata direttamente dalle cosiddette curve  $p/y$  per le reazioni laterali e le curve  $t-z$  per le reazioni verticali. Per semplicità di esposizione ci limiteremo alle curve  $p-y$ , ma tutti i procedimenti possono essere estesi anche alle curve  $t-z$ . L'unica differenza risiede nel fatto che le  $t-z$  sono differenziate per il fusto e per la punta, in quanto il contributo di rigidità della base del palo è più grande di quello semplicemente dovuto alla portata laterale.

Il concetto unificante è che il palo, forzato a muoversi nel terreno, riceve una reazione al movimento (Fig. 2.2.5) che si traduce in una compressione, secondo una legge di caratteristiche fortemente non lineari.

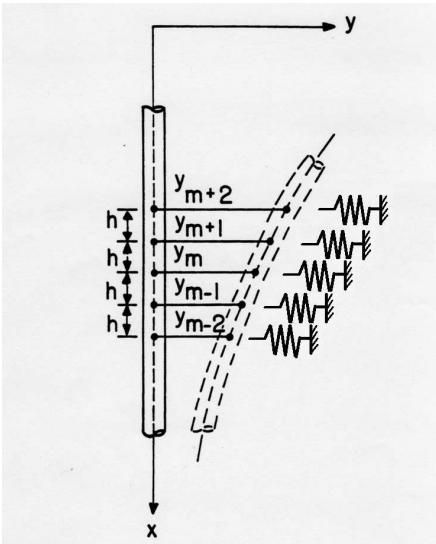


Fig. 2.2.5 – Molle laterali agenti sul palo

Per di più, superato un certo limite di spostamento massimo, il terreno raggiunge la resistenza limite e crolla, fornendo reazioni minori. Le caratteristiche dei modelli di comportamento dipendono ovviamente dai terreni e dai loro parametri di rigidità e resistenza al taglio. Varie formulazioni sono state proposte da vari autori. Esistono curve per argille (Fig. 2.2.6 – Matlock, 1970),

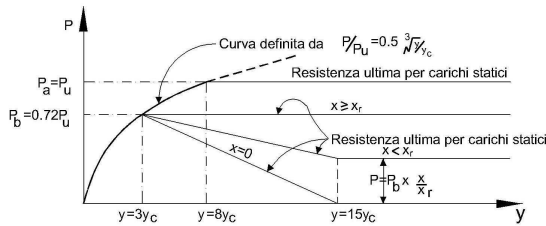


Fig. 2.2.6 – Curva p-y in argille

curve ricavate per sabbie (Fig. 2.2.7 – Reese e al, 1974) e curve per materiali intermedi.

Riveste inoltre particolare importanza il fatto che il tipo di carico sia statico o ciclico, come potrebbero essere dei carichi dovuti a un semplice peso oppure all'effetto di onde marine. I movimenti ciclici esauriscono più facilmente la resistenza del terreno: perciò le curve p-y nel caso ciclico sono sempre più restrittive delle corrispondenti curve statiche.

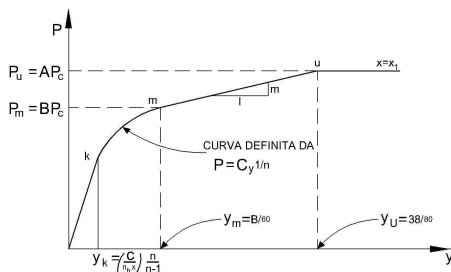


Fig. 2.2.7 Curva p-y in sabbie

Un palo immerso in un terreno stratificato, in definitiva, risponde ad un insieme di leggi p-y (e t-z) differenziate in base alla stratigrafia e alle caratteristiche dei materiali dei

singoli strati. Tomlinson (1981) sintetizza il modello complessivo delle curve p-y come in Figg. 2.2.8 e 2.2.9.

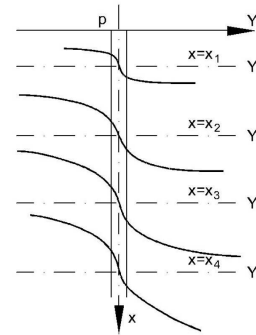


Fig. 2.2.8 – Modello di reazione p-y

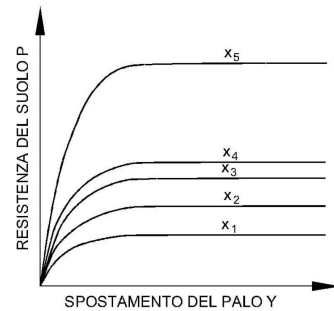


Fig. 2.2.9 – Sintesi di curve p-y a varie profondità

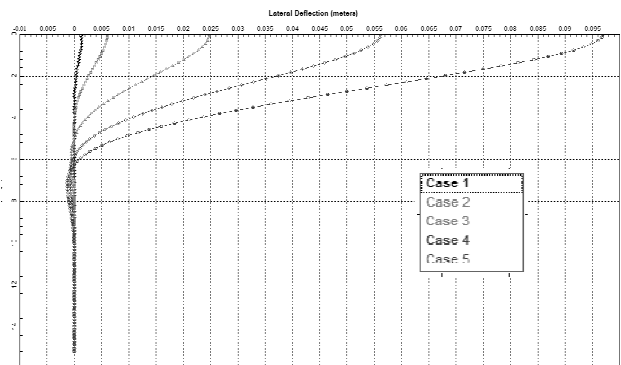


Fig. 2.2.10 – Risultati FDM: spostamenti laterali

I termini dell'analisi FDM contengono una serie di informazioni riguardanti sia la struttura (lunghezza, rigidità), sia le caratteristiche del terreno. I risultati si traducono direttamente in analisi strutturale del palo. Nel caso dei elementi caricati lateralmente si ottengono profili di spostamenti e azioni flettenti lungo il fusto del palo, utilizzabili per il dimensionamento strutturale. In Fig. 2.2.10 è mostrato l'output di un programma FDM in termini di spostamenti di un palo incastrato superiormente nella fondazione, al quale sono applicati 5 step di carico monotonicamente crescente. In Fig. 2.2.11 è mostrato l'output per le stesse fasi di lavoro relativo alle azioni flettenti.



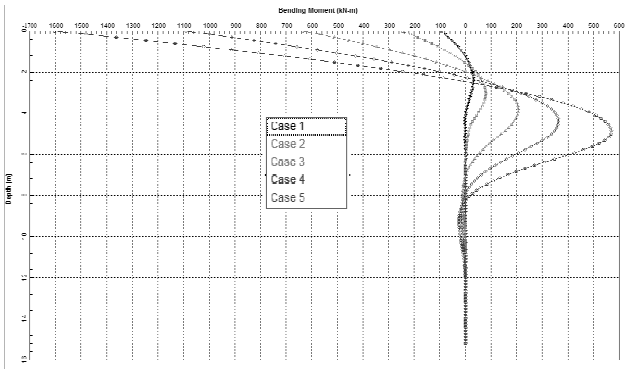


Fig. 2.2.11 – Risultati FDM: azione flettente lungo il fusto del palo

## NON LINEARITÀ, PLASTICITÀ, MODELLI COSTITUTIVI E FATTORI DI SICUREZZA

### 3.1 – Non linearità

I metodi numerici FDM e FEM, nella loro formulazione generale, utilizzano algoritmi risolutivi composti da sistemi di equazioni algebriche lineari. In realtà, i problemi geotecnici coinvolgono sempre relazioni non lineari, dal momento che i terreni mostrano comportamento plastico già a bassissimi livelli tensionali. Sia le leggi costitutive di tipo elastoplastico perfetto, sia i diagrammi di risposta di molle come in Fig. 2.1.8, i diagrammi di forma composita come le curve  $p-y$  (figg. 2.2.6 e 2.2.7) o altri modelli costitutivi quali il Cam-Clay, utilizzano perciò artifici di calcolo che permettano di utilizzare delle soluzioni lineari in problemi che lineari non sono, talora in maniera marcata.

Ogni algoritmo risolutivo adotta tecniche specifiche per implementare una modellazione plastica, ma tutte le soluzioni hanno in comune una serie di iterazioni successive introdotte nei modelli fisici-numerici. In generale, date alcune leggi non lineari come quelle di sforzi/deformazione mostrate nelle Figg. 3.1.1 e 3.1.2, si procede a “linearizzarle” introducendo spezzoni di rette che ne approssimano il comportamento.

La rappresentazione è volutamente grossolana allo scopo di evidenziare la tecnica. Ovviamente, quanto più piccoli sono gli intervalli successivi  $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_2$ , tanto migliore risulta l'approssimazione funzionale. I numeri tra parentesi indicano il numero di iterazioni richieste per ottenere convergenza di risultati: quanto maggiore è l'intervallo  $\Delta\epsilon$ , tanto maggiore sarà il relativo scarto  $\Delta\sigma$ , necessitando di più iterazioni di calcolo per raggiungere la convergenza. Gli algoritmi nei quali l'intera matrice delle rigidezze  $K$  viene ricostruita ad ogni iterazione, migliori come definizione però più lenti (meno iterazioni ma più lavoro per costruire le matrici delle rigidezze) dal punto di vista del calcolo, rispettano lo schema di Fig. 3.1.1, in cui gli spezzoni lineari passano tutti per l'origine.

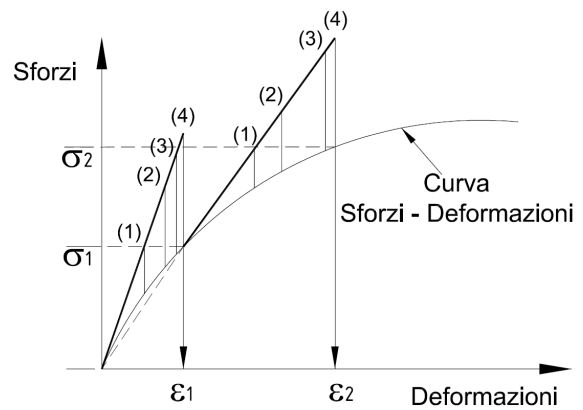


Fig. 3.1.1 – Metodo a rigidezze variabili

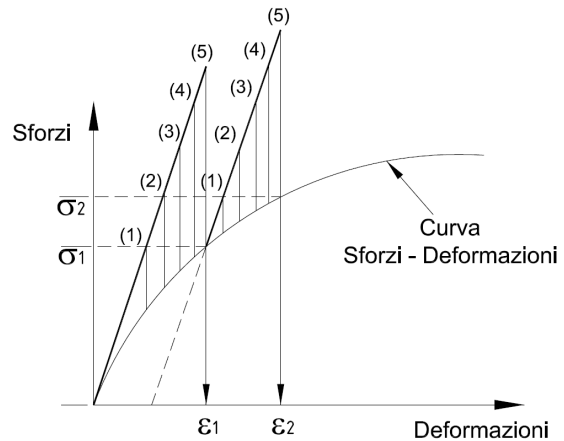


Fig. 3.1.2 – Metodo a rigidezze costanti

Gli algoritmi che mantengono la stessa matrice inalterata e lavorano sulla manipolazione delle sole forze esterne, veloci ma tendenzialmente sovrastimanti le resistenze, rispettano lo schema di Fig. 3.1.2.

I problemi FDM nel dominio dello spazio, come le curve  $p-y$  e  $p-z$  sopra discusse, utilizzano direttamente algoritmi di questo tipo per “trascriverle” all'interno dei sistemi lineari.

### 3.2 – Plasticità dei materiali

Un altro aspetto, sempre presente nelle analisi di stabilità, comporta iterazioni di tipo differente. Occorre innanzitutto definire a priori uno stato di “snervamento” dei terreni da contrapporre allo stato “elastico”. La relazione fondamentale riguardante le deformazioni complessive a cui è sottoposto un elemento di terreno snervato è la seguente:

$$d\epsilon_{elem} = d\epsilon_{el}^e + d\epsilon_{el}^p \quad (5)$$

dove gli apici “e” e “p” stanno ad indicare la quota parte di deformazione elastica e plastica dell'elemento sottoposto a carico oltre al limite di snervamento.

Nel caso particolare di elementi materiali con legge perfettamente plastica, la “condizione di plasticità” si identifica con il “criterio di rottura” stesso.

Rimanendo per comodità in questa schematizzazione, utilizzando il criterio di Mohr-Coulomb (3), tutti i punti che giacciono entro il campo di esistenza (interni alla

piramide di Fig. 2.1.5), rendono negativa la funzione  $F$  e sono esenti da collasso, mentre i punti esterni al campo di esistenza (esterni alla piramide) rendono positiva la funzione  $F$  e sono plasticizzati. Generalizzando tale concetto, in base alle leggi di comportamento dei materiali, lineari o non lineari, gli stati di stress possono giacere all'interno o all'esterno dei campi di esistenza definiti dalle leggi costitutive. In più, i percorsi di sollecitazione possono essere elastici (e quindi reversibili) oppure anelastici. In un algoritmo FEM elastico-perfettamente plastico, la situazione può essere esemplificata come in Fig. 3.1.3. Una funzione di collasso  $F$ , definita come legge costitutiva in funzione delle caratteristiche di resistenza a taglio e degli stati di sforzo, è resa negativa per valori al di sotto di un certo limite (comportamento elastico) e maggiore quando il limite è superato (comportamento plastico). Al di fuori del campo elastico, il comportamento non è più governato dalla  $F$  ma dal potenziale di plasticizzazione  $Q$ . Altri modelli di comportamento possono presupporre leggi più complesse, senza togliere validità al concetto, eventualmente introducendo varianti intermedie di comportamento quali l'incrudimento del materiale.

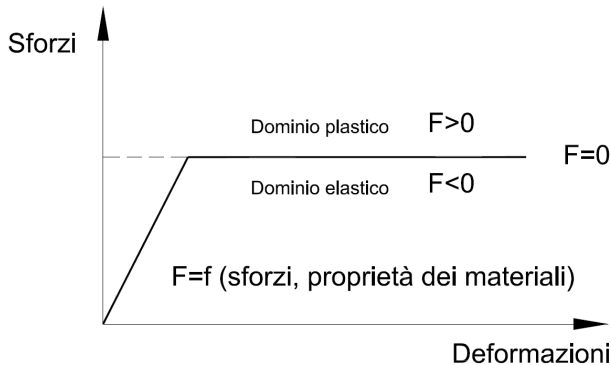


Fig. 3.1.3 – Elastoplasticità perfetta

Tutti questi problemi, estremamente complessi, vengono trattati nel loro insieme nelle teorie di plasticità e con la definizione delle leggi costitutive.

La teoria della plasticità, talora implementata come legge di viscoplasticità, permette di modellare il comportamento dei suoli incorporando buona parte delle caratteristiche volute. Ammettendo che il terreno sia in grado di sostenere per "limitati periodi di tempo" degli stress anche oltre il proprio limite di collasso, Zienkiewicz e Corneau (1974) hanno sviluppato una teoria viscoplastica, molto utilizzata in geotecnica, che permette di risolvere la 5) nei calcoli FEM. In alternativa alla teoria viscoplastica, spesso si utilizza anche il metodo degli "stress iniziali" (Zienkiewicz, 1969).

### 3.3 – Meccanismi di diffusione

Senza entrare nei dettagli del processo numerico, è importante capire cosa accade negli algoritmi FEM quando uno o più punti di Gauss all'interno di elementi finiti si trovano in stato di plasticizzazione/collasso. Ovviamente si generano degli eccessi di forze non equilibrati, in quanto ogni porzione di terreno può caricarsi di sollecitazioni solamente fino al proprio limite

di resistenza a taglio. Superato tale limite, il terreno si deforma più o meno indefinitamente non offrendo ulteriore contributo oltre al proprio limite. In molti casi, con sabbie dense e argille sovraconsolidate, il contributo a taglio addirittura decresce dopo un valore di picco. Gli sforzi eccedenti vengono perciò ripartiti sugli elementi intorno a quello plasticizzato, e, dopo aver aggiornato il sistema di forze a cui sono sottoposti tutti gli elementi ("body loads") con le nuove forze aggiuntive, l'algoritmo FEM procede ad una nuova iterazione di calcoli di stabilità. A propria volta, la nuova iterazione di calcolo può produrre nuovi stati di plasticizzazione oppure no, nel quale caso si rende necessaria una nuova ridistribuzione dei carichi ed un ulteriore calcolo. L'iterazione della soluzione del sistema algebrico FEM può essere condotta anche diverse centinaia di volte prima di capire se il calcolo è destinato a convergere ad un risultato oppure no. In altri termini, l'intero processo si interrompe solo quando due iterazioni di calcolo successive forniscono un insieme di risultati identici o comunque differenti tra loro per quantità estremamente piccole, fissate a priori.

In tale situazione, anche in presenza di situazioni diffuse di plasticizzazione, l'insieme viene definito globalmente stabile per le condizioni di geometria, di carico e per le caratteristiche di resistenza considerate.

### 3.3 – Fattori di sicurezza geotecnici

Il collasso di un meccanismo geotecnico viene raggiunto quando i fenomeni di plasticizzazione sono talmente importanti da non poter essere "compensati" dall'intervento degli elementi al contorno, pur invocando un esteso meccanismo di redistribuzione. Ciò avviene p. es. quando si supera il limite di capacità portante ultimo di una fondazione diretta, oppure quando si verifica una frana. Il primo tipo di collasso (per capacità portante) si verifica quando ad un terreno di determinata resistenza a taglio si applicano delle sollecitazioni eccessive. Il modo migliore per definire il limite di capacità portante, dal punto di vista FEM, è di ripetere il calcolo viscoplastico aumentando monotonicamente i carichi ogni volta che l'algoritmo converge, fino alla sicura rottura del terreno. L'ultimo carico a cui il terreno resiste senza innescare fenomeni di non convergenza numerica, può essere assunto come capacità portante limite. Si parla, in questi casi di tecnica risolutiva per incremento di sollecitazione. In fig. 3.1.4 è mostrata la definizione FEM di capacità portante di una fondazione superficiale. Il terreno è puramente coesivo con  $C_u = 100$  KPa. Solo quando il carico iniziale di 100 KPa viene moltiplicato per un fattore  $F_s = 5.2$  ( $100 * 5.2 = 520$  KPa) la fondazione collassa, come mostra la curva carichi/cedimenti massimi sulla destra, interrotta per mancata convergenza dopo l'esecuzione di 1250 iterazioni di calcolo FEM. Il fattore di sicurezza reale della fondazione è compreso tra 5.0 e 5.2. Infatti, l'ultimo valore di  $F_s$  in assenza di collasso, corrispondente all'ultima convergenza ottenuta dopo 110 iterazioni, era pari a 5.0.

Un secondo criterio di non convergenza, più idoneo per i fenomeni franosi, si può verificare mantenendo i carichi del sistema costanti, riducendo i parametri di resistenza a taglio e ripetendo con continuità i calcoli FEM finché non si verificano fenomeni di instabilità.

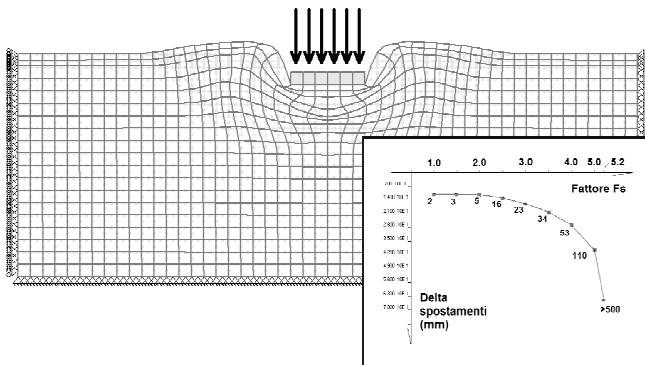


Fig. 3.1.4 – Collasso per incremento di sollecitazione

Tale metodo, definito SRF (Strength Factor Reduction) consiste nell'applicare a coesione  $c$  e angolo di attrito interno  $\phi$  un fattore riduttivo SF, ricavando i valori di progetto  $c_d$  e  $\phi_d$  come segue:

$$c_d = c / SF \quad (6.1)$$

$$\tan \phi_d = \tan(\phi) / SF \quad (6.2)$$

Eseguito un calcolo preliminare con  $SF = 1$ , e verificata la convergenza numerica, si aumenta SF (*si riduce la resistenza a taglio*) ripetendo il calcolo FEM. Il metodo viene reiterato varie volte: nel caso in cui il calcolo converga, si applicano nuovamente valori di SF crescenti, finché le resistenze risultano diminuite al punto tale da non garantire più la stabilità (mancata convergenza del calcolo diffusivo). Anche in questo caso, il fattore di sicurezza ricavato è l'ultimo valore di SF prima che si verifichi l'instabilità. La precisione di entrambi i metodi dipende da quanto vicini tra loro sono i valori di SF introdotti in due calcoli successivi.

A titolo di esempio, gli spostamenti rappresentati in Fig. 2.1.4 sono stati ottenuti utilizzando il metodo SFR.

### 3.4 – Modelli costitutivi dei suoli. Soluzioni alle differenze finite nel dominio del tempo. Commenti sugli algoritmi.

Introdotti i metodi di calcolo, si vuole approfondire il criterio di collasso (“legge costitutiva”) che governa il problema geotecnico agli elementi finiti.

La legge di Mohr-Coulomb (3) viene spesso utilizzata per la risoluzione dei problemi geotecnici indifferentemente per i suoli drenanti che per i suoli non drenanti. Essa beneficia soprattutto della consuetudine da parte dei tecnici con almeno due dei tre parametri di resistenza a taglio (la coesione  $c$  e l'angolo di attrito interno  $\phi$ ) e con i due parametri di compressibilità  $E$  (modulo di Young) e  $\nu$  (coefficiente di Poisson). La dilatanza  $\psi$ , comunque, in alcune analisi non confinate come quella di stabilità del pendio, risulta nei fatti poco determinante. Secondo

un'invalsa classificazione, la legge di Mohr-Coulomb è un modello a 5 parametri.

Un modello teoricamente valido, tuttavia utilizzabile solamente in limitate situazioni pratiche, è quello della Cam Clay, nella forma originaria o in quella modificata (modello a 8 parametri). Il limite teorico consiste nel fatto che vengono descritti suoli argillosi normalmente consolidati, oppure suoli preconsolidati isotropicamente (mentre in sito i materiali sono quasi sempre consolidati in condizioni  $K_0$ ). Il valore aggiunto è peraltro una più raffinata soluzione, utile nel caso dei problemi che investono una consolidazione primaria. Il comportamento del terreno risulta più complesso rispetto alla perfetta elastoplasticità come raffigurata nel campo di esistenza piramidale in Fig. 3.1.3. Si ammette una distinzione tra il limite elastico (dominio di plasticizzazione) e il dominio di rottura vero e proprio. Nell'intervallo tensionale tra i due domini, viene introdotto l'incrudimento del materiale.

Altre leggi costitutive sono state proposte: Rocchi (2007) propone un modello a 12 parametri valido per argille. Modelli a più parametri, fino a 15 e più, sono implementati in algoritmi proprietari di diversi programmi di calcolo commerciali.

Un aspetto che contraddistingue le leggi costitutive del tipo Mohr-Coulomb rispetto al Cam Clay ed ai legami costitutivi derivati, risiede nel trattamento dei processi di consolidazione. Tralasciando i dettagli numerici, il modello Cam Clay, una volta implementato nei suoi parametri essenziali, può risolvere autonomamente problemi in cui siano presenti argille sia in condizioni drenate, sia in condizioni non drenate. La stessa legge costitutiva, senza bisogno di variare i parametri in input, può presupporre situazioni di normalconsolidazione iniziali per poi definire cosa succede nello stesso materiale un certo tempo dopo che sia stato imposto un determinato carico. Infatti, anche attraverso un meccanismo di *accoppiamento*, il problema idraulico della consolidazione viene implementato negli stessi algoritmi FEM in maniera organica.

Il processo consolidativo, come noto, si svolge nel tempo, motivo per cui alcuni algoritmi introducono le *differenze finite nel dominio del tempo*, considerando intervalli temporali tra una valutazione FEM e la successiva. In tal modo definiscono autonomamente, in base allo specifico modello ed ai parametri coinvolti, tutte le variazioni nelle caratteristiche geotecniche delle argille al procedere del processo consolidativo.

Gli algoritmi basati sulla legge di Mohr-Coulomb, al contrario, presuppongono unicamente situazioni indipendenti dal tempo. Occorre quindi un intervento ulteriore, automatizzato oppure effettuato direttamente dall'utente, affinché venga ripetuto il calcolo nelle diverse fasi di una consolidazione in corso. Ogni volta, i parametri geotecnici iniziali, variati nel tempo in ragione del fenomeno consolidativo, vengono reintrodotti in un successivo ciclo di calcolo FEM.

In questo senso, il modello di Mohr-Coulomb si presta particolarmente alle analisi geotecniche *non accoppiate*, a cui possono essere ricondotte, con opportune precauzioni,

la maggior parte delle analisi interessanti da un punto di vista ingegneristico.

In definitiva, è difficile stabilire quale modello sia da preferire all'atto pratico, in quanto la complessità di alcuni modelli a largo spettro può essere giustificata rispetto alla "laconicità" del modello di Mohr-Coulomb, pagando però – a parere di chi scrive - un importante prezzo in termini di comprensione immediata dei processi algoritmici.

A tale riguardo, è da rilevare che spesso i programmi commerciali sono basati su algoritmi proprietari non adeguatamente riscontrabili, spesso addirittura per quanto riguarda la costruzione del sistema risolvibile (1) e per i quali non è possibile una completa verifica – come dovrebbe essere per qualsiasi proposizione con valenza scientifica.

Anche l'economicità dell'approccio, a volte, gioca un ruolo importante, considerando che i modelli più sofisticati finiscono spesso per dipendere dall'aspetto qualitativo di un grande numero di parametri, da ricavare attraverso campionamenti e prove di laboratorio.

D'altra parte, pare utile sottolineare che i risultati ottenibili mediante vari approcci, per le stesse categorie di problemi, devono garantire limitate variazioni nei risultati quando la modellazione risulti della stessa qualità (accuratezza dei dati ingegneristici e geognostici, dimestichezza degli algoritmi da parte dell'utenza, proprietà di impiego).

E' indubbio che i modelli più complessi presuppongono maggiore qualità a livello di dati di input, sia geotecnico che di definizione ingegneristica generale (tempistiche, fasi di lavoro, problematiche di *accoppiamento*). I risultati ottenuti varieranno altrettanto nel livello di definizione, ma varieranno anche i livelli di impegno progettuale e di estensione delle indagini indispensabili per lo specifico modello, risorse il cui costo deve ovviamente trovare sempre opportuna giustificazione.

E' comunque indubitabile la conclusione che i modelli FEM e FDM di analisi geotecnica hanno raggiunto un livello di sviluppo e di affidabilità tale per cui gli approcci "tradizionali" semplificati appaiono sempre più limitativi e dovrebbero essere al più presto superati nella pratica professionale quotidiana.

## ABSTRACT

All modern engineering statements about geotechnical problems should be based upon global approaches, able to describe and solve both stability and settlement scenarios to give proper design forecasts. The unified method constituted by the State Limits Analysis is aware of checking all aspects of the construction process: safety, serviceability and durability. Despite these complex tasks, the majority of geotechnical analysis are performed in practice still using approximated theories that are remained unchanged in last decades. At the same time, the Finite Element Method (FEM) and the Finite Difference Method (FDM) were increasingly developed in the field of numerical approaches, and today they give reliable answers about the complex behaviour of soils and about

the soil-structure interaction. All these non-traditional theories do not need simplification of the geotechnical problems in order to make feasible the analysis. The only approximations are due to the today's advancement in mathematics, and not to "a priori" simplifications made to get "affordable" solutions.

Without sake of completeness, this paper deals with some basic FEM's and FDM's features, in order to understand how these methods work, which nowadays are practically economical and not time-consuming at least as the "traditional" approaches.

The complex FEM approach, allowing for one-dimensional as well as multidimensional applications, is depicted, mentioning current uses in some permeation problems. The FDM methods, in the dominion of space for soil-structure interaction, and in the dominion of time for consolidation, are also introduced.

Finite elements, FEM, finite differences, FDM

- Bishop A.W. (1955) *The use of slip circle in the stability analysis of slopes* – Geotechnique, vol. 5(1), pp. 7-17.
- Bowles J. E., 1974, *Analytical and Computer Methods in Foundation Engineering*, Mc Graw Hill Books, New York, pp. 128-254
- Bowles J. E., 1997, *Foundation Analysis and design*, Mc Graw Hill, New York, pp. 557-587, 741-771
- Griffiths D. V. – Lane P. A., 1999, *Slope stability analysis by finite elements*, Géotechnique 49, no. 3, pp 387-403
- Habibagahi K., Langer J. A., 1984, *Horizontal Subgrade Modulus of Granular Soils*, ASTM STP 835, pp. 21-34
- Kraft, L.M., Ray, R.P., Kagawa, T., 1981, *Theoretical t-z curves*, J. Geotech. Engrg., ASCE, 107(11), 1543-1561.
- Matlock H., 1970, *Correlations for design of laterally loaded piles in soft clay*, Proceedings of the Offshore Technology Conference, Houston, Texas, Paper OTC 1204
- Rabuffetti A. S., 2010, *Fondazioni superficiali, progetto e calcolo geotecnico secondo le nuove NTC*, DEI Tipografia del Genio Civile, Roma
- Reese L. C., Cox W. R., Koop F. B., 1974, *Analysis of laterally loaded piles in sand*, Proceedings of the Offshore Technology Conference, Houston, Texas, Paper OTC 2080
- Reese, L.C., Wang, S.T., 1986, *Method of analysis of piles under lateral loading*, Marine Geotechnology and Nearshore/Offshore Structures, ASTM STP 923, R.C. Chaney and H.Y. Fang, pp. 199-211
- Rocchi G., Fontana M., Da Prat M., 2007, *Modelling of natural soft clay destruction process using viscoplasticity theory*, Geotechnique, vol. 53(8), pp. 729-745.
- Schlichting H., 1960, *Boundary Layer Theory*, Mc Graw Hill Books, New York
- Smith I. M. – Griffiths D. V., 1988, 2004 *Programming the Finite Element Method*, John Wiley & Sons, Chichester, GB, pp. 192-217, 319-356
- Timoshenko S., Woinowsky-Krieger S., 1959, *Theory of Plates and Shells*, Mc Graw Hill Books, New York

- Tomlinson M. J., 1981, *Pile design and construction practice*, Cement and Concrete Association, GB, pp. 243-248
- Vesic' A. S., 1961, *Beams on Elastic Subgrade and the Winkler's Hypotesis*, 5th ICSMFE, Vol. 1, pp. 845-850
- Zienkiewicz O. C. – Taylor R. L., 1989, *The Finite Element Method, Vol. 1, basic formulation and linear problems*, Mc Graw Hill Book Europe, Maidenhead, GB
- Zienkiewicz O. C. – Taylor R. L., 1991, *The Finite Element Method, Vol. 1, solid and fluid mechanics, dynamics and non-linearity*, Mc Graw Hill Book Europe, Maidenhead, GB, pp. 211-260