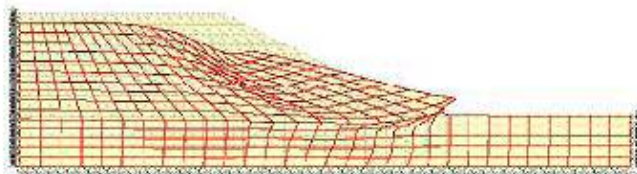


# **ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI IN GEOTECNICA: L'APPROCCIO TEORICO**



L'ANALISI AGLI ELEMENTI FINITI  
NEL PROBLEMA DELLA STABILITA' DEL PENDIO  
UN APPROCCIO FORTEMENTE INNOVATIVO



### **3 – DESCRIZIONE SINTETICA DEL METODO**

#### **3.1 – MODALITA' DI DISCRETIZZAZIONE**

##### **3.1.1 – L'ELEMENTO FINITO.**

La sua estensione, forma, posizione, è a priori del tutto arbitraria, fatte salve certe regole e proprietà da rispettare. I tipi di Elementi Finiti sono numerosi, ma hanno una serie di caratteristiche comuni (per esempio un Elemento piano non può essere "concavo", ogni Elemento deve essere adeguatamente vincolato al contorno).

Nel settore della Geotecnica (Fig. 3.1), si considerano a seconda dei problemi da risolvere Elementi monodimensionali ("beam", in grado di schematizzare pali, tiranti, diaframmi), bidimensionali ("piani", che oltre a pali e diaframmi modellano direttamente il terreno), tridimensionali ("brick", validi per ogni problema di modellazione).

Un Elemento Finito, di qualsiasi tipo, è il campo di integrazione elementare (Fig. 3.2) dotato di:

- nodi, in corrispondenza dei quali si scrivono le equazioni che compongono il sistema risolutivo, in modo da calcolare valori analitici puntuali di idonee grandezze (nel caso del pendio, gli spostamenti del terreno). I nodi sono per lo più disposti al contorno, ma in alcuni casi anche all'interno degli Elementi
- Funzioni di Forma, che hanno lo scopo di mettere in relazione il valori delle grandezze definite ai nodi con ciascun punto all'interno dell'Elemento (partendo dalle grandezze ai nodi permettono di determinare quelle corrispondenti all'interno dell'Elemento)
- una Matrice delle Rigidezze, che governa la relazione tra le caratteristiche dell'Elemento Finito e quanto risulta ai nodi del sistema (partendo dalle proprietà dell'Elemento si determinano le proprietà ai nodi, utilizzate nella modellazione matematica)
- caratteristiche elastiche proprie, che confluiscono nella Matrice delle Rigidezze
- caratteristiche geotecniche proprie, che confluiscono nei legami costitutivi dei materiali

Per motivi computazionali, ciascun Elemento Finito è dotato di un sistema di assi di riferimento autonomo, di coordinate  $\xi$  ed  $\eta$ . Questi assi (Fig. 3.3) non sono necessariamente ortogonali, e per definizione esprimono un campo di variabilità compreso tra  $-1$  e  $+1$ . Le proprietà che ne derivano dal punto di vista dell'algebra del metodo sono fondamentali.

Le Funzioni di Forma sono espresse in termini di  $\xi$  e  $\eta$ .

Godendo di proprietà rapportabili al sistema di coordinate generali  $x$  e  $y$ , gli Elementi Finiti si definiscono "isoparametrici".

Molto utilizzati nella pratica sono gli elementi trave, biella, filo (monodimensionali), i triangoli a 3, 6 o 7 nodi e i quadrilateri a 4, 8, 9 nodi (planari), gli elementi brick a 8, 20 o 21 nodi.

Nel caso di Elementi Finiti planari, è sottintesa la modellazione di una superficie avente spessore unitario, una sorta di "fetta" rappresentativa di una condizione fisica opportunamente definita (Fig. 3.4). Si suppone che tra una "fetta" e la successiva non vi

siano differenze sostanziali di comportamento, e quindi non si sviluppino tensioni in grado di alterare la soluzione generale.

Alcuni speciali vantaggi sono offerti in certi casi da elementi dotati di bordi curvilinei.

### 3.1.2 – I NODI

Sono gli elementi fisici in cui convergono uno o più elementi finiti.

Dal punto di vista algebrico, il sistema risolvibile del continuum è ricavato mediante equazioni scritte unicamente in corrispondenza dei nodi.

Si considera per praticità un problema piano a due gradi di libertà, senza tuttavia perdere di generalità nella trattazione.

In sostanza, il modello matematico risolve il continuum verificando la congruenza degli spostamenti nell'intero campo di integrazione (Fig. 3.5).

In altre parole, il sistema risolvibile determina unicamente gli spostamenti del sistema, dal momento che in corrispondenza di ciascun nodo si possono scrivere soltanto due equazioni, che governano rispettivamente:

- la congruenza degli spostamenti in direzione  $x$  (orizzontale)
- la congruenza degli spostamenti in direzione  $y$  (verticale)

I nodi possono essere liberi o vincolati (Fig. 3.3).

Essendo due i gradi di libertà dei nodi, i vincoli possono riferirsi:

- allo spostamento orizzontale
- allo spostamento verticale
- ad entrambi gli spostamenti.

All'interno del continuum, i nodi sono normalmente liberi: la loro posizione, determinata dagli eventuali spostamenti, è dipendente unicamente dal calcolo FEM, ovvero dalla geometria del problema e dalle caratteristiche dei materiali.

In altri termini, i nodi dotati di tutte le libertà sono in grado di assestarsi (traslare) a seconda della loro posizione all'interno del continuum e delle condizioni del pendio nel suo insieme.

Ai bordi del continuum i nodi possono essere invece liberi o vincolati. Nel caso in cui appartengano alla superficie superiore del pendio, o al bordo inclinato libero, il loro comportamento seguirà le stesse regole dei punti interni.

Quando i punti appartengono invece alla base o al contorno di terreno "eliminato" dal problema in quanto ininfluenti, essi sono generalmente vincolati.

I vincoli, dal punto di vista del modello matematico esprimono come detto una limitazione delle libertà di traslazione. In termini di modello, una singola restrizione (verticale o orizzontale) comporta l'adozione di un "carrello" fisico. Una doppia restrizione comporta l'adozione di una "cerniera" fisica (Fig. 3.6).

### 3.1.3 – LE CONDIZIONI AL CONTORNO DEL MODELLO MATEMATICO

I contorni del problema di stabilità vengono definiti come segue:

- in concomitanza di regioni delle quali si ritiene ininfluenza il comportamento, in quanto sicuramente stabili (per esempio la presenza di un livello roccioso di base o di un livello stratigrafico compatto). Spesso su questi contorni si impostano vincoli bidirezionali (cerniere)
- ad una ragionevole distanza dalle superfici di frana: in generale questi contorni vengono schematizzati come vincolo monodirezionali (carrelli).

### 3.1.4 – RELAZIONI E CORRISPONDENZE DI COMPORTAMENTO TRA NODI E PUNTI ALL'INTERNO DEGLI ELEMENTI FINITI

Nel modello matematico, tutte le caratteristiche di rigidità degli Elementi Finiti che interagiscono convergono nei nodi con i quali interagiscono (cioè ai che nodi appartengono al loro contorno).

Il passaggio dalle caratteristiche degli Elementi alle equazioni ai nodi è formalmente diretto.

L'interazione numerica tra caratteristiche geometriche e/o di rigidità degli Elementi - ed equazioni di congruenza ai nodi, è governata dalla Matrice delle Rigidezze di ciascun Elemento Finito.

Viceversa, conoscendo i valori delle traslazioni di tutti i punti nodali di un Elemento, tramite le Funzioni di Forma è possibile ricostruire gli spostamenti di ciascun punto interno all'Elemento.

In Fig. 3.7 è riportato un esempio di calcolo di spostamento di un punto qualsiasi all'interno di un Elemento, tramite le Funzioni di Forma, conoscendo le traslazioni di ciascun nodo e la posizione del punto in termini di  $\xi$  e  $\eta$  (approccio lagrangiano).

Conoscendo il campo di variazione di tutti gli spostamenti all'interno dell'Elemento Finito, è possibile successivamente determinare anche lo stato di sollecitazione punto per punto all'interno del campo.

### 3.2 – FORMULAZIONE DEL METODO AGLI ELEMENTI FINITI. RISULTATI E LIMITI DEL CALCOLO ELASTICO.

Il problema generalizzato agli Elementi Finiti si basa sul seguente algoritmo risolutivo.

a – Tutte le grandezze relative alla discretizzazione in Elementi Finiti vengono rapportate ai nodi di pertinenza. Il sistema numerico risolutivo riguarda esclusivamente equazioni scritte per i nodi del sistema.

Si definisce il numero dei gradi di libertà nodali  $n$  del sistema, pari al numero di equazioni del sistema risolutivo.

In linea di principio, esso è definito da  $nn * In - Iv$ , dove  $nn$  è il numero dei nodi,  $In$  è il numero di gradi di libertà di ciascun nodo (traslazioni, rotazioni) e  $Iv$  è il numero di libertà nodali bloccate a causa dei vincoli esterni

b – Si considerano le seguenti grandezze matriciali:

- un vettore di forze esterne nodali  $P[n]$ , in notazione matriciale **P**

- un vettore di grandezze incognite  $X[n]$  rappresentante le variabili del sistema risolvente da determinare (traslazioni, rotazioni), in notazione matriciale  $\mathbf{X}$
- una matrice generale  $KE[n,n]$  derivata dai contributi dei singoli Elementi Finiti, in notazione matriciale  $\mathbf{KE}$

c – Si scrive la relazione fondamentale agli Elementi Finiti in termini matriciali:

$$P[n] = KE[n,n] * X[n] \quad 3.1)$$

che viene invertita al fine di ricavare il vettore incognito

$$\mathbf{X} = \mathbf{KE}^{-1} * \mathbf{P} \quad 3.2)$$

d – La risoluzione della 3.2) consente di determinare gli spostamenti di tutti i nodi del sistema. Conoscendo le singole componenti di spostamento contenute in  $X[n]$ , si risale, elemento per elemento e tramite le Funzioni di Forma, a definire il comportamento in ogni punto interno di ciascun Elemento Finito.

I passi sopra definiti valgono in generale per qualsiasi formulazione FEM, supponendo che le caratteristiche intrinseche materiche di ciascun Elemento Finito (le Leggi Costitutive dei materiali) siano in grado di reggere tutte le deformazioni calcolate.

In altri termini, gli spostamenti calcolati e le deformazioni del continuum sono da considerarsi “elastici”, derivati in base a un calcolo lineare e perfettamente reversibili. Questa circostanza comporta l’assunzione che tutti gli spostamenti siano compatibili con le caratteristiche di resistenza dei materiali, in particolare la resistenza al taglio.

Nel caso del pendio con formazione di superfici di scivolamento, questo assunto non è sempre verificato, in quanto in alcune posizioni il terreno “si rompe” generando la frana. In termini di corrispondente modellazione, alcuni Elementi Finiti “collassano”, ed il calcolo deve necessariamente tenerne conto.

Si introducono per questo opportuni concetti di non linearità, elastoplasticità e viscoplasticità applicate al comportamento dei terreni, utilizzando comunque sempre l’algoritmo generale che sostiene la soluzione FEM.

### 3.3 – ELASTOPLASTICITA’ E VISCOPLASTICITA’

#### 3.3.1 – LE LEGGI COSTITUTIVE DEI MATERIALI

I terreni, come ogni materiale ingegnerizzabile, sono modellati mediante opportune Leggi Costitutive, che mettono in relazione le caratteristiche di deformabilità con i limiti di resistenza, da intendere come soglie oltre le quali si ha il collasso. Per molto tempo l’Ingegneria ha limitato i suoi interessi a semplici Leggi in campo elastico. Da anni però, in una larga serie di specializzazioni, si è esteso il campo di studio e di applicazioni ben oltre tale limite.

Un tipico esempio di Legge Costitutiva è dato dalla legge di Hooke, valida per molti materiali metallici come per esempio l'acciaio, estesa opportunamente oltre il limite di elasticità e fino alle condizioni di collasso.

Un passaggio fisicamente riscontrabile dall'elasticità alla plasticità dei materiali è correlato al limite di snervamento a trazione o compressione, come mostrato in Fig. 3.8. Si nota la definizione di precise soglie oltre le quali l'oggetto sottoposto a sollecitazione muta sensibilmente comportamento.

Per gli stati di sollecitazione monoassiale, per esempio una barra metallica sottoposta a trazione, la rappresentazione di Fig. 3.8 è esaustiva. La linea bilatera ideale sintetizza la prima fase di comportamento del materiale, perfettamente elastico, a cui segue una seconda fase di snervamento e quindi la rottura. La porzione sinistra della bilatera, come noto, rappresenta la legge di Hooke di linearità tra sforzi e deformazioni.

Lo snervamento è invece accompagnato da alti livelli tensionali, più o meno costanti, e produce ulteriori allungamenti fino alla caduta repentina delle sollecitazioni che caratterizza la rottura.

La linea tratteggiata rappresenta il comportamento reale dei materiali, sottintendendo che la bilatera ideale è un legame più facilmente modellabile in termini computazionali.

Per definizione, quando il materiale segue la prima porzione della bilatera il suo comportamento è perfettamente elastico. Nella seconda porzione, il regime di sforzi/deformazioni diviene perfettamente plastico.

Dal punto di vista teorico, nel caso di un continuum spaziale come i terreni, la rappresentazione della Legge Costitutiva assume la forma di Fig. 3.9. Gli assi coordinati disegnano un dominio sforzi – deformazioni, l'interpretazione avviene generalmente rispetto al contorno rappresentato nel dominio.

Il terreno all'interno del contorno si comporta in modo elastico, quello all'esterno in modo anelastico. La curva che delimita i due campi è detta Funzione di Snervamento, e risulta interessante osservare le modalità con cui il terreno supera questo limite fisico.

Nel caso in cui si considerino all'interno e all'esterno valide le stesse relazioni, la Legge Costitutiva si dice associata. Una Legge di tipo associato comporta notevoli semplificazioni dal punto di vista computazionale, ma appare meno realistica.

Se all'interno del campo elastico valgono funzioni formalmente differenti da quelle valide all'esterno, la Legge Costitutiva è di tipo non associato.

I modelli matematici delle Leggi Costitutive possono variare di forma rispettando la stessa base concettuale.

In Fig. 3.10 è rappresentata la superficie di snervamento che pertiene al criterio di Mohr Coulomb applicabile ai terreni.

Per comodità computazionale FEM in questo caso lo spazio tensoriale è dato dagli assi  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , correlati alle tensioni a cui è sottoposto un singolo elemento di terreno. Il campo di comportamento elastico è delimitato dalla piramide rovesciata con asse coincidente con la diagonale spaziale, la cui forma esagonale è caratteristica.

Solamente all'interno della piramide il suolo si comporta in modo elastico.

Altre superfici di snervamento sono state proposte, come quelle relative ai criteri di Von Mises (Fig. 3.11), Tresca e Druker Prager, ma riguardano casi particolari o approssimazioni di comportamento. Si tratta infatti di situazioni limite, con la piramide che degenera a prisma e/o la base poligonale che viene approssimata con la circonferenza.

La funzione più appropriata per i terreni risulta quella di Mohr Coulomb che, con opportune codifiche di calcolo, comprende ogni situazione reale.

Un problema di rappresentatività all'interno dell'Elemento Finito viene risolto introducendo i Punti di Gauss, che sono punti significativi nei quali si possono integrare le proprietà relative all'intero Elemento. In altri termini, dati i 4 Punti di Gauss mostrati in Fig. 3.3, esistono soluzioni in forma chiusa rappresentative degli integrali di campo estesi all'intero Elemento Finito.

La trattazione delle condizioni di collasso geotecnico, non potendosi condurre per i punti (teoricamente infiniti) all'interno di ogni singolo Elemento, viene condotta nell'analisi FEM a livello dei 4 Punti di Gauss.

Con le tecniche numeriche proprie dell'analisi, quanto viene riscontrato ai Punti di Gauss viene successivamente ripartito in modo opportuno ai Nodi dell'Elemento Finito.

### 3.3.2 – L'INTEGRAZIONE DELLE LEGGI NEGLI ELEMENTI FINITI

Le Leggi Constitutive devono essere modellate matematicamente sia all'interno che all'esterno delle superfici di snervamento (Figg. 3.9 e 3.10).

La formulazione dell'algoritmo FEM, come descritta fino ad ora, è applicabile integralmente per tutte gli "stress path" in campo perfettamente elastico.

Alcune strategie di calcolo permettono di utilizzare la stessa impostazione teorica per risolvere il comportamento del terreno anche in campo plastico. Tra i modelli computazionali disponibili, quello meglio adattabile al comportamento dei materiali terrosi, a questo scopo, è la teoria della viscoplasticità.

#### 3.3.2.1 – LA VISCOPLASTICITÀ

Il terreno all'interno della piramide in Fig. 3.10 segue percorsi di sforzi / deformazioni definiti e reversibili, ovvero si comporta in modo elastico. All'esterno della piramide, le funzioni matematiche che esprimono il suo funzionamento devono necessariamente essere differenti.

La Teoria della Viscoplasticità ammette che una certa coerenza persista comunque nel comportamento di insieme. Variando gli opportuni parametri di calcolo, si ammette in sostanza che anche all'esterno della Funzione di Snervamento, per certi istanti opportunamente definiti, il materiale sia in grado di resistere a sollecitazioni esterne.

L'analisi numerica viene condotta a livello dei 4 Punti di Gauss di ogni singolo Elemento.

Valgono le seguenti definizioni:

1 – si dà una ben definita Funzione di Plasticizzazione  $Q$  invece della Funzione di Snervamento  $F$ , valida all'esterno del campo elastico

2 – si considera una cadenza di deformazione visco-plastica  $\dot{\epsilon}^{vp} = F \partial Q / \partial \sigma$  che caratterizza il comportamento del materiale al di fuori del campo elastico

3 – si stabiliscono gli intervalli di tempo per i quali il terreno continua a resistere al di fuori del campo elastico  $\Delta t = 4 (1+\nu)(1-2\nu) / [E(1-2\nu+\text{sen}^2\phi)]$ . Tali intervalli sono definiti in modo da garantire la stabilità numerica del problema

4 – si moltiplica la cadenza per l'intervallo di tempo, ricavando una deformazione viscoplastica che va a sommarsi a quella precedentemente accumulata del terreno.

### 3.4 – IL COLLASSO DEL PENDIO.

Attraverso la viscoplasticità si accumulano deformazioni e successivamente Sollecitazioni Fisiche (“body-loads”) che si sommano a quelle precedentemente calcolate. Queste Sollecitazioni Fisiche, calcolate per i Punti di Gauss, vengono subito ripartite ai nodi dell’Elemento.

Valutando in sequenza tutti gli Elementi Finiti, ciascuno con i propri Punti di Gauss, ai Nodi del Sistema Risolvente si accumulano deformazioni in aggiunta a quelle elastiche inizialmente calcolate.

Ogni Elemento che plasticizza produce in sovrapposizione delle deformazioni plastiche che vanno a sommarsi ai suoi nodi. Gli Elementi confinanti, attraverso gli stessi nodi, ricevono delle deformazioni che a volte sono compatibili con il comportamento elastico, a volte invece generano nuove plasticizzazioni.

Il calcolo iterativo (iterazione di Primo Livello) fa in modo che tutte le deformazioni che nascono nel modello FEM vengano riassorbite in continuazione dagli Elementi contigui. Se questo si verifica, allora il pendio viene considerato complessivamente in equilibrio, nonostante le plasticizzazioni locali.

Se invece la generazione di deformazioni plastiche e relative Sollecitazioni Fisiche innesca un meccanismo che non mostra termine, ovvero gli altri Elementi non sono in grado di riassorbire le deformazioni viscoplastiche, il pendio si considera instabile a causa del collasso di un numero sufficientemente largo di Elementi.

Dal punto di vista numerico, l’algoritmo iterativo (di Primo Livello) prevede quanto segue:

- preparazione e risoluzione iniziale del Sistema Risolvente utilizzando la Matrice Elastica delle Rigidezze
- ispezione di tutti i Punti di Gauss di tutti gli Elementi Finiti. Se esistono Punti di Gauss plasticizzati, le deformazioni viscoplastiche che ne derivano vengono redistribuite ai Nodi di bordo di ciascun Elemento
- esecuzione di iterazioni successive (ovvero modifica del Sistema Risolvente con nuova risoluzione completa) per un numero sufficiente di volte.

La modifica consiste nella redistribuzione degli incrementi viscoplastici.

Il numero di iterazioni viene giudicato congruo se:

- dopo un certo numero di risoluzioni complete il sistema converge, ovvero il collasso di Elementi Finiti viene riequilibrato da un insieme sufficiente di Elementi non collassati
- il numero di risoluzioni supera un limite arbitrario abbastanza grande di ripetizioni (p. es. 250 o 500 iterazioni) senza che le plasticizzazioni abbiano termine.

La generazione complessiva delle Sollecitazioni Fisiche è in ogni caso autoequilibrata, cioè non va globalmente a variare il campo di sollecitazioni esterne (forze peso) applicate al sistema FEM.

In Fig. 3.12 è mostrato il diagramma a blocchi del sistema di iterazioni di Primo Livello, utile a verificare la convergenza del Sistema Risolvente in campo elasto – plastico.



### 3.5 – DETERMINAZIONE DEL FATTORE DI SICUREZZA

L'input del problema agli Elementi Finiti è costituito da una serie di dati geometrici (il profilo del pendio) e relativi alle proprietà dei materiali (parametrizzazione geotecnica). Vincoli esterni e idrologia del pendio si possono pensare come particolari dati assegnati attraverso questi due gruppi principali.

Una prima analisi avviene normalmente introducendo nel modello matematico i dati fisici propri del problema e riscontrabili in campo (parametri "nominali"). Nel caso in cui i risultati delle iterazioni di Primo Livello non restituiscano una condizione di collasso, si pone il problema di definire il grado di sicurezza reale del pendio.

Il metodo di ricerca del Fattore di Sicurezza consiste nel "diminuire" i parametri di resistenza a taglio, coesione e angolo di attrito, in ragione di un certo fattore arbitrario, e ripetere tutti i calcoli già svolti nelle condizioni "nominali".

Se di nuovo le iterazioni di Primo Livello non determinano il collasso del pendio, si aumenta il fattore riduttivo dei parametri di taglio (in definitiva li si diminuisce di valore) per la prossima soluzione iterativa.

I parametri di resistenza al taglio coinvolti nella determinazione di  $F_s$  sono la coesione  $C$  e la tangente dell'angolo di attrito interno  $\tan \phi$ .

Il processo viene ripetuto aumentando  $F_s$  finché il sistema numerico risolvete smette di convergere. In questo caso, il valore di  $F_s$  più ravvicinato che restituisce il pendio stabile, viene assunto come Fattore di Sicurezza di Calcolo.

Tipicamente si assume una prima iterazione di Secondo Livello con valori del Coefficiente di sicurezza  $F_s = 1, 2, 3 \dots$

Una volta determinato il range opportuno di verifica, si affina il calcolo. Dapprima si pone p. es.  $F_s = 2.1, 2.2, 2.3, \dots$ , quindi  $F_s = 2.30, 2.31, 2.32, \dots$ , ecc., fino a raggiungere il grado di precisione desiderato.

Il meccanismo delle iterazioni di Secondo Livello è mostrato in Fig. 3.13.

### 3.6 – METODO FEM E CONDIZIONI DRENATE E NON DRENATE. SISMA SUL PENDIO

Le calcolazioni F.E.M. riguardano la geometria e la geotecnica di un certo pendio sottoposto ad un certo campo di sollecitazioni applicato alla massa stessa del terreno.

Ogni eventuale condizione aggiuntiva di calcolo non modifica gli algoritmi generali. In condizioni drenate, non drenate o in presenza di sisma, si dovrà comunque assemblare il sistema 3.1) da invertire tramite la 3.2), analizzare se si verificano fenomeni di plasticizzazione e ridistribuire eventuali sovrasollecitazioni tra elementi collassati ed altri non collassati al contorno, ecc..

In input, si tiene conto della saturazione di alcune porzioni del pendio semplicemente differenziando vari "livelli" di terreno distinti.

Le condizioni di falda e l'idrologia in generale del pendio verranno via via schematizzati considerando i pesi di volume in termini di sforzi totali o efficaci, come richiesto dal tipo di

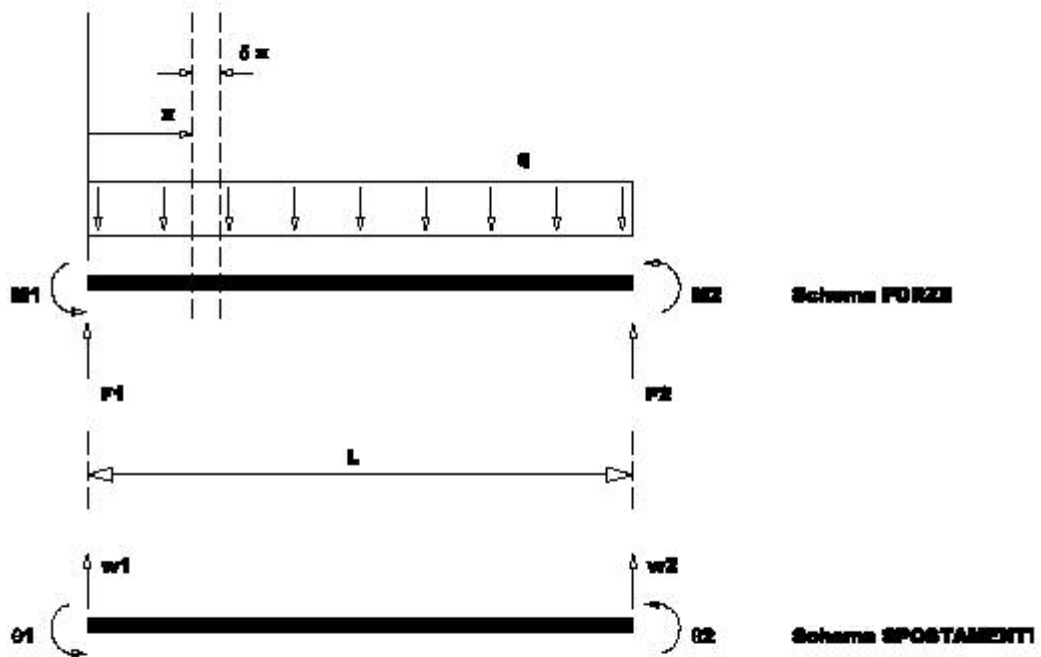
problema, utilizzando sempre gli stessi tipi di algoritmi, semplicemente adattati alle condizioni fisiche (utilizzo dei pesi di volume totali oppure efficaci per il calcolo di  $P[]$  nella 3.1) e/o della Funzione di Snervamento).

Nessun particolare problema computazionale nasce se il pendio è completamente emerso, in quanto il peso di volume del materiale non varia.

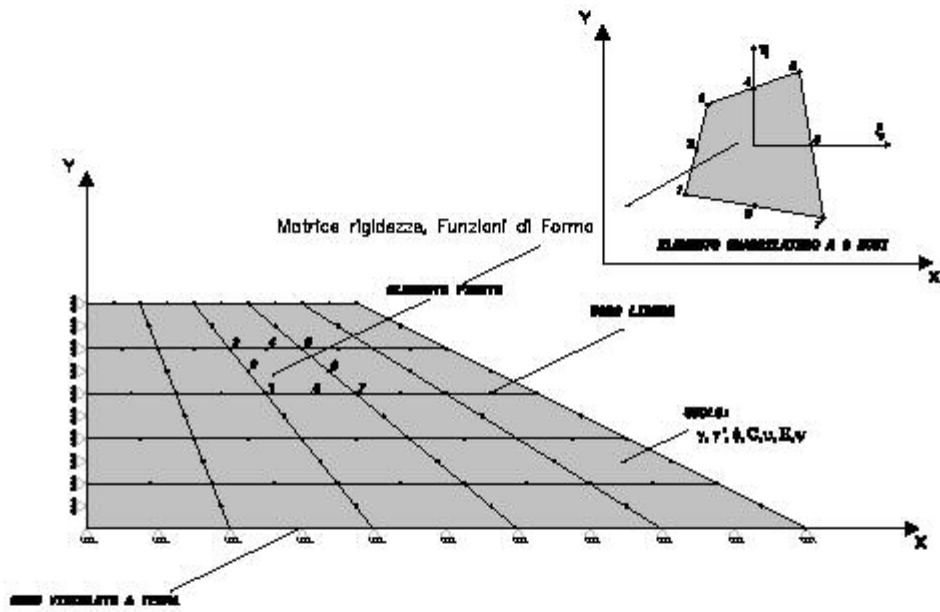
Il sistema viene invece modellato nel calcolo FEM semplicemente aggiungendo alle forze esterne  $P[]$  nella 3.1) un ulteriore contributo di forze di massa.

La soluzione analitica matriciale presentata non varia.

Le forze sismiche avranno direzione prestabilita (generalmente orizzontale e talora verticale) ed intensità proporzionale al peso di volume dell'elemento in termini di sforzi totali e all'accelerazione sismica valutata per il sito.

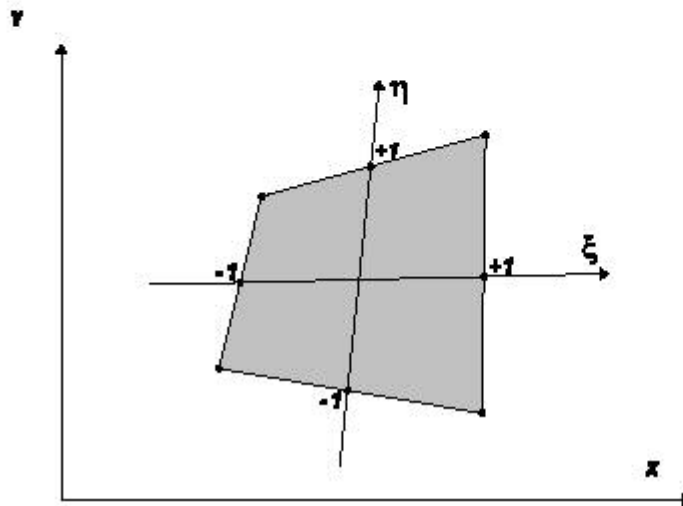


**FIG. 3.1**



**FIG. 3.2 - CARATTERISTICHE DELLA MESH**

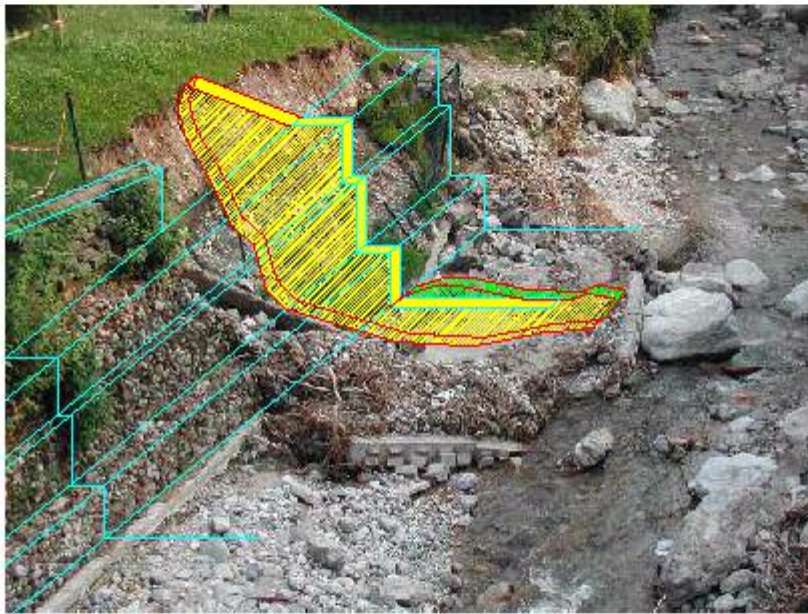
**ELEMENTO QUADRILATERO A 8 NODI**  
**RIFERIMENTI: SISTEMA GLOBALE E SISTEMA LOCALE**



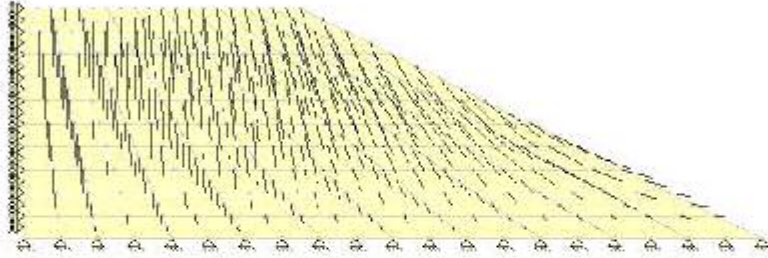
Funzioni di forma in termini di coordinate locali  $\xi$  e  $\eta$ , scelte con criterio di variabilità di campo  $\xi = \pm 1$ ,  $\eta = \pm 1$

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} (1-\xi) (1-\eta) (-\xi-\eta-1) \\ N_2 &= \frac{1}{2} (1-\xi) (1-\eta^2) \\ N_3 &= \frac{1}{4} (1-\xi) (1+\eta) (-\xi+\eta-1) \\ N_4 &= \frac{1}{2} (1-\xi^2) (1+\eta) \\ N_5 &= \frac{1}{4} (1+\xi) (1+\eta) (\xi+\eta-1) \\ N_6 &= \frac{1}{2} (1+\xi) (1-\eta^2) \\ N_7 &= \frac{1}{4} (1+\xi) (1-\eta) (\xi-\eta-1) \\ N_8 &= \frac{1}{2} (1-\xi^2) (1-\eta) \end{aligned}$$

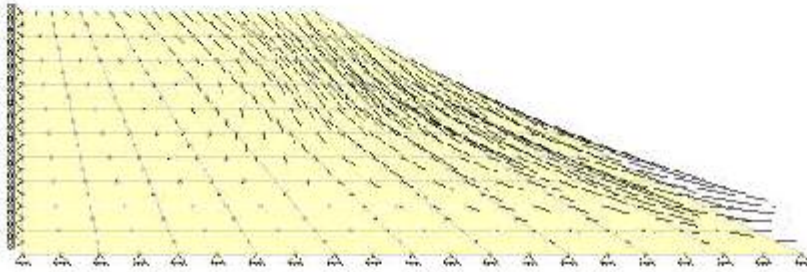
**FIG. 3.3**



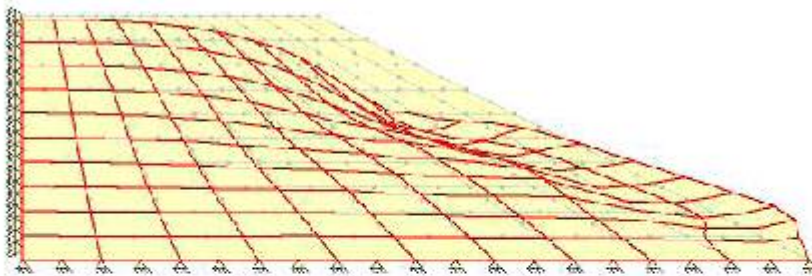
**FIG 3.4**



a) – Profilo degli assestamenti globali

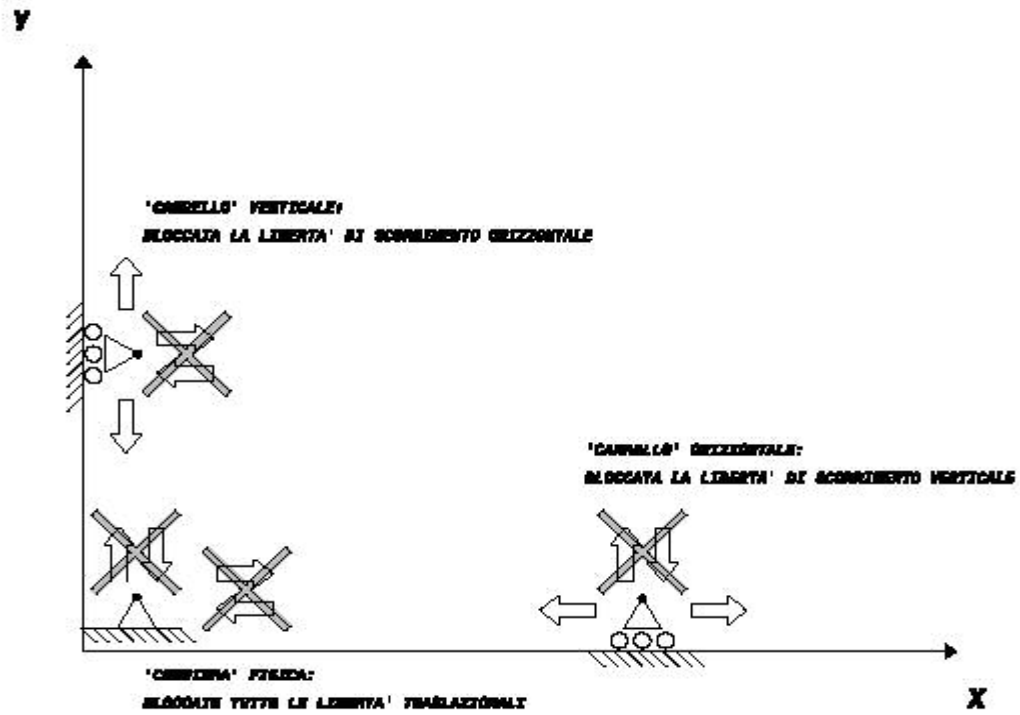


b) – Profilo riferito alla condizione iniziale



c) – Profilo della frana

FIG. 3.5 – Campo di spostamenti congruenti ottenuti mediante analisi FEM. I tre profili costituiscono elaborazioni dei medesimi dati.



**FIG. 3.6 - Tipologie  
dei vincoli al contorno**



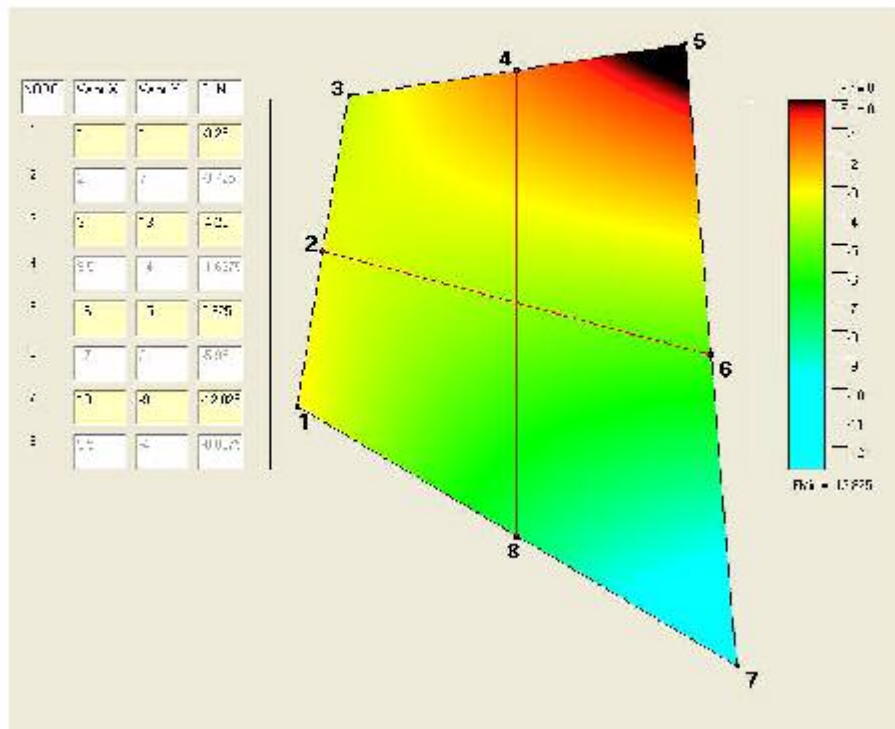


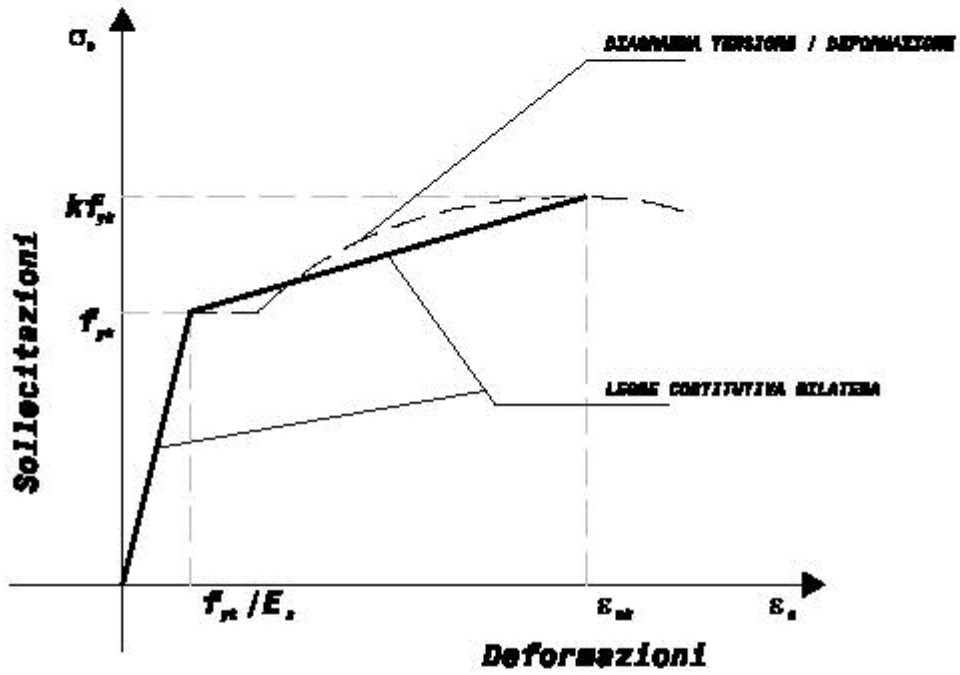
FIG. 3.7 –

La conoscenza dei valori che assume una data funzione ai nodi permette ricostruire il campo di variazione con continuità all'interno dell'intero Elemento Finito, tramite l'utilizzo delle Funzioni di Forma.

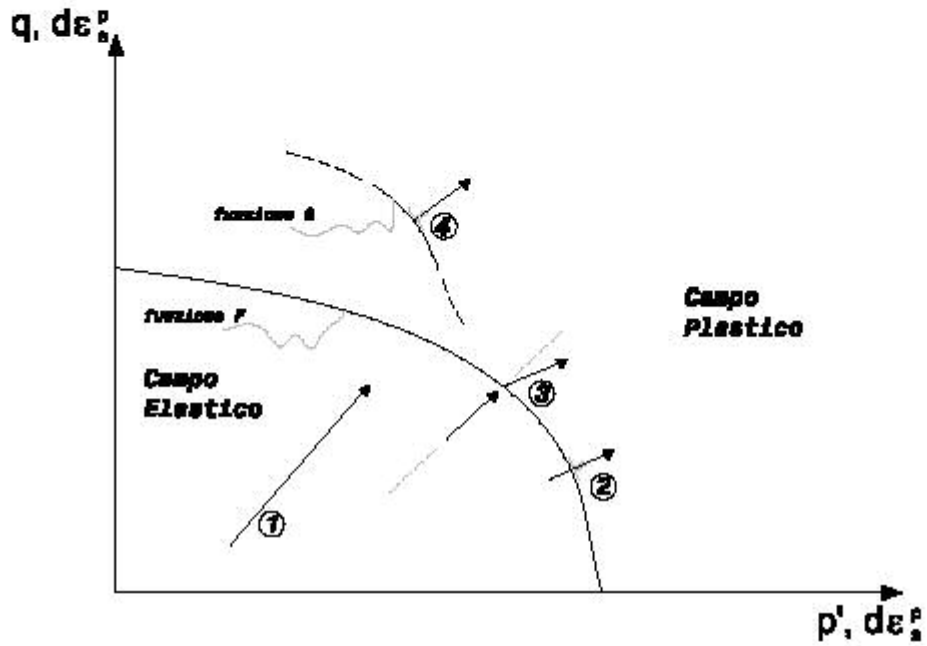
La funzione è visualizzata come colorazione:

- in nero i valori di  $F > 0$
- a colori il campo variazionale tra 0 e il valor minimo della funzione, come mostrato dalla barra graduata.

Il valore che assume funzione ai nodi è specificato sulla sinistra.



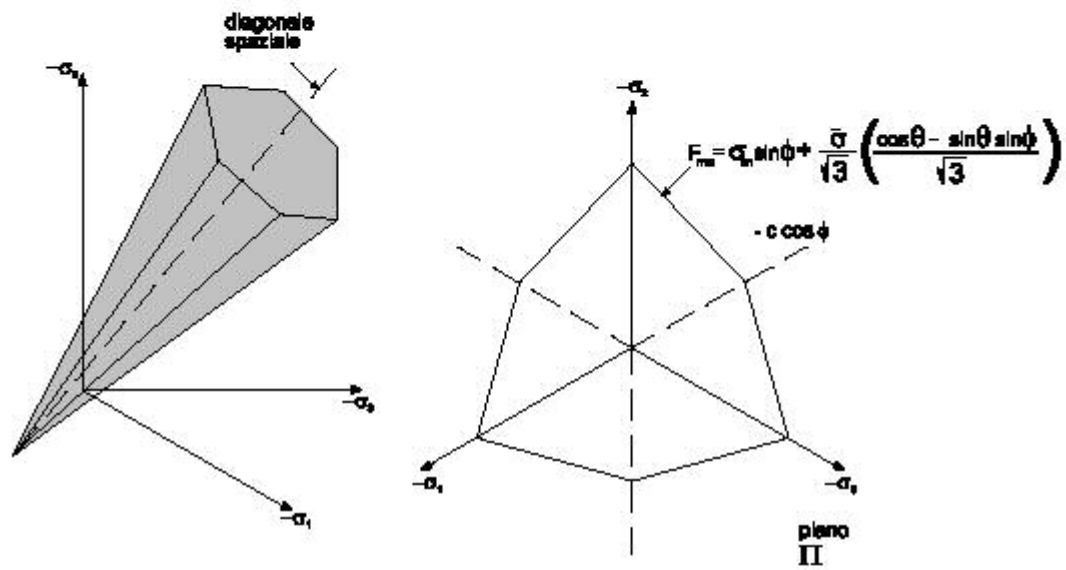
**FIG. 3.8 Legge Costitutiva  
per acciaio a snervamento definito**



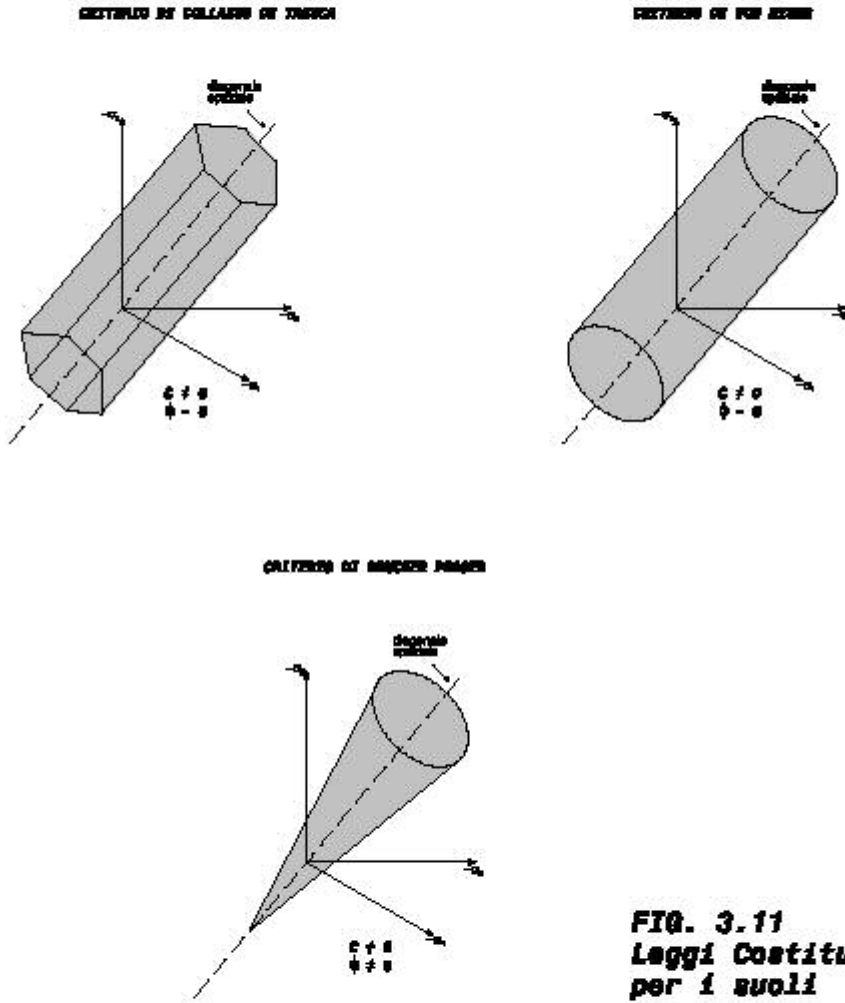
**LEGENDA: \_**

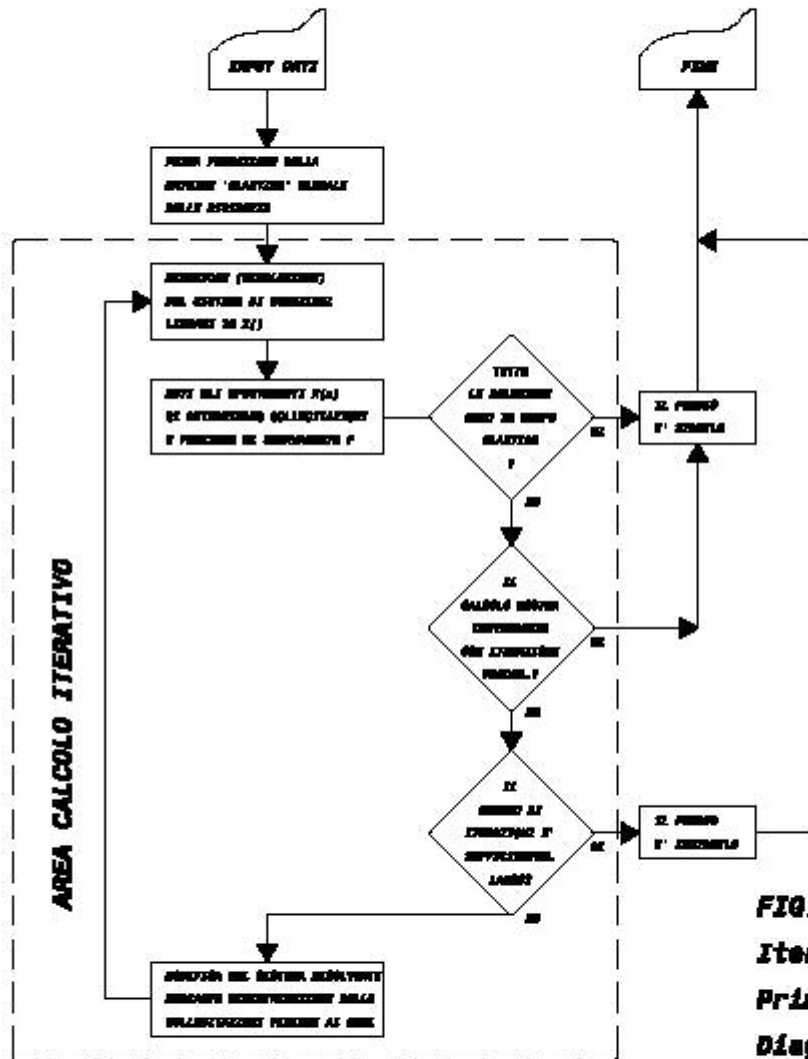
- ① - "Stress path" in campo elastico
- ② - "Stress path" elastoplastico con Legge associata
- ③ - "Stress path" elasto-plastico con legge non associata
- ④ - "Stress path" in campo plastico

**FIG. 3.9**  
**Tipica Legge Costitutiva**  
**per i terreni**

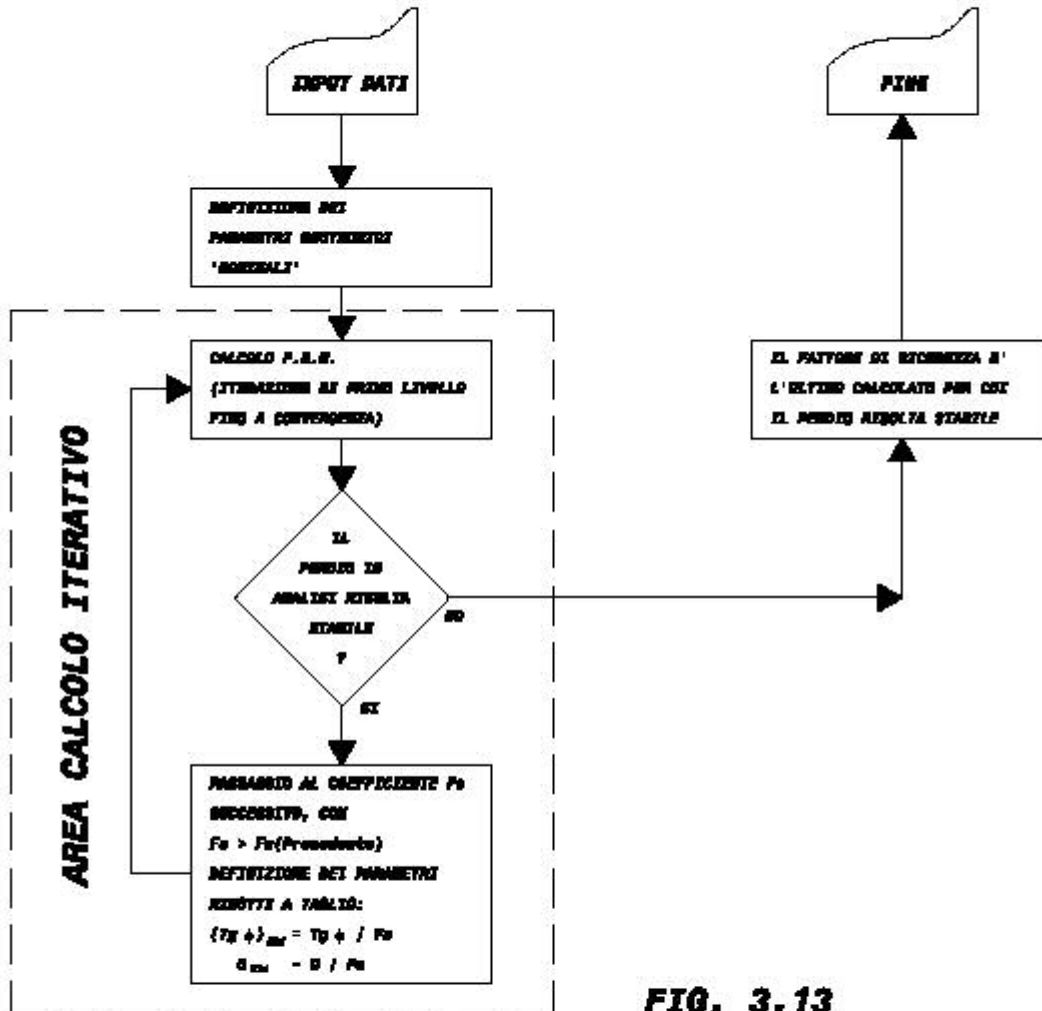


**FIG. 3.10 CRITERIO DI COLLASSO DI MOHR - COULOMB**





**FIG. 3.12**  
**Iterazione di**  
**Primo Livello:**  
**Diagramma di flusso**



**FIG. 3.13**  
**Iterazione di**  
**Secondo Livello:**  
**Diagramma di flusso**